MATEMATIK-STUDERENDE

Første studieår
Introduktion til matematiske metoder

Skriftlig prøveeksamen
december 2012

Dato: selvvalgt
Tidspunkt: varighed 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 3 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -24 \cdot 2^n. \tag{1}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

(b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

(c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

(d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

(e) Vis, at $x_{\mathrm{p}}(n) = n^2$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2 + 2. \tag{2}$$

(f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2. \tag{3}$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

(a) Vis, at

$$x(n) = n3^n$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 3 \cdot 3^n.$$

Find den fuldstændige løsning til denne differensligning.

(b) Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 8x(n+1) + 32x(n) = f(n).$$

Bestem en følge $f(n)$, således at følgen $x_{\mathrm{p}}(n) = 2^{n-1}$ er en partikulær løsning til differensligningen.

(c) Er de tre følger

$$x_1(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_2(n) = \frac{n}{n+1}, \quad x_3(n) = 3, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

lineært uafhængige eller lineært afhængige? Svaret skal begrundes.

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering.

(a) Betragt følgende problem, hvor c er et reelt tal, med $c \geq 3$.

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimér } cx_1 + x_2 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&3x_1 + x_2 \leq 3, \\
&x_1 + x_2 \leq 3/2, \\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,
\end{aligned}$$

og løs det ved hjælp af simplexmetoden. Bemærk, at både simplextabellerne, de variable der er i basis'erne og deres værdier, den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning skal angives.

(b) Angiv skyggeprisen for kapacitetsbegrænsningen $3x_1 + x_2 \leq 3$.

(c) Opskriv det duale problem og løs dette grafisk, afhængig af hvad c er.

(d) Forklar, hvordan følgende problem, som <u>ikke</u> er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimér } 2(x_1 - 1) + x_2 - 1 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&x_1^2 \leq 9, \\
&-x_1 + 2x_2 \leq 4, \\
&\tfrac{x_1}{x_2} \leq 3, \\
&x_1 \geq 0, x_2 > 0.
\end{aligned}$$

(e) Løs dette problem grafisk.

Opgave 4. Denne opgave omhandler systemer af differensligninger. Der er givet et system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= -3x_1(n) - 2x_2(n), \\
x_2(n+1) &= x_1(n).
\end{aligned}$$

(a) Opskriv systemet på vektor-matrix form ved at bestemme en 2×2 matrix A, således at systemet skrives som $\mathbf{x}(n+1) = A\mathbf{x}(n)$.

(b) Beregn udtryk for potenserne A^n for alle $n \geq 1$.

(c) Bestem den løsning til det givne system, der opfylder begyndelsesbetingelserne $x_1(0) = 2$ og $x_2(0) = -2$.

(d) Bestem den fuldstændige løsning til det tilhørende inhomogene system

$$\begin{aligned}
x_1(n+1) &= -3x_1(n) - 2x_2(n) + 6, \\
x_2(n+1) &= x_1(n) + 3.
\end{aligned}$$

θ	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1

Nogle resultater Nedenfor er et antal nyttige formler vedrørende de trigonometriske funktioner $\cos(\theta)$ og $\sin(\theta)$.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1. \tag{4}$$

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{5}$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2). \tag{6}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta). \tag{7}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta). \tag{8}$$

$$\cos(\pi + \theta) = -\cos(\theta). \tag{9}$$

$$\sin(\pi + \theta) = -\sin(\theta). \tag{10}$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta). \tag{11}$$

$$\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta). \tag{12}$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin(\theta). \tag{13}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos(\theta). \tag{14}$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta). \tag{15}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta). \tag{16}$$