

MATEMATIK-ØKONOMI-STUDERENDE

Første studieår

Introduktion til matematiske metoder i økonomi

Skriftlig prøveeksamen

december 2012

med korte svar

Dato: selvvalgt

Tidspunkt: varighed 4 timer

Tilladte hjælpemidler: Lærebøger, notater mv. må medbringes.

Ikke tilladte hjælpemidler: Elektroniske hjælpemidler som lommeregner og bærbar computer. Andet elektronisk udstyr må heller ikke medbringes. Dette inkluderer alle former for kommunikationsudstyr (mobiltelefon, PDA osv.), musikafspillere osv.

Bemærk: Ingen form for kommunikation mellem eksaminanderne er tilladt.

Opgavesættet findes på de følgende 6 sider.

Vedrørende besvarelse: Svar skal begrundes med udregninger og/eller forklaringer.

Sidste side indeholder formler og resultater, der må bruges ved besvarelse af opgaverne.

Opgave 1. Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -24 \cdot 2^n. \quad (1)$$

- (a) Bestem den fuldstændige løsning til den tilhørende homogene ligning.

Karakteristisk ligning $r^2 - 2r - 8 = 0$ med rødder -2 og 4 . Fuldstændig løsning er

$$x_h(n) = c_1(-2)^n + c_24^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

- (b) Bestem en partikulær løsning til den givne ligning (1).

Gæt $y(n) = c2^n$ giver $x_p(n) = 3 \cdot 2^n$

- (c) Bestem den fuldstændige løsning til den givne ligning (1).

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_24^n + 3 \cdot 2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

- (d) Bestem den løsning til den givne ligning (1), der opfylder betingelserne

$$x(0) = 0, \quad x(1) = 0.$$

$$x(n) = -(-2)^n - 2 \cdot 4^n + 3 \cdot 2^n$$

- (e) Vis, at $x_p(n) = n^2$ er en partikulær løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2 + 2. \quad (2)$$

Indsæt $x_p(n) = n^2$ og regn ud:

$$(n+2)^2 - 2(n+1)^2 - 8n^2 = n^2 + 4n + 4 - 2(n^2 + 2n + 1) - 8n^2 = -9n^2 + 2.$$

- (f) Bestem den fuldstændige løsning til differensligningen

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2. \quad (3)$$

Vi bruger, at $-9n^2 = (-9n^2 + 2) - 2$ og finder først en partikulær løsning til

$$x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -2$$

ved at gætte på $y(n) = c$, som giver $y(n) = \frac{2}{9}$. Dermed er $x_p(n) = n^2 + \frac{2}{9}$ en partikulær løsning til $x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = -9n^2$ og den fuldstændige løsning er

$$x(n) = c_1(-2)^n + c_24^n + n^2 + \frac{2}{9}, \quad c_1, c_2 \in \mathbf{R}.$$

Opgave 2. Denne opgave omhandler flere forskellige emner.

- (a) Vis, at

$$x(n) = n3^n$$

er en løsning til første ordens differensligningen

$$x(n+1) = 3x(n) + 3 \cdot 3^n.$$

Find den fuldstændige løsning til denne differensligning.

Vi sætter ind. Venstre side giver $(n+1)3^{n+1}$, og højre side giver

$$3n3^n + 3 \cdot 3^n = (n+1)3^{n+1},$$

som er det samme, så det er en partikulær løsning. Den fuldstændige løsning til $x(n+1) = 3x(n)$ er $x(n) = c3^n$, $c \in \mathbf{R}$, så den fuldstændige løsning til den inhomogene ligning er

$$x(n) = c3^n + n3^n, \quad c \in \mathbf{R}.$$

- (b) Der er givet en anden ordens differensligning

$$x(n+2) - 8x(n+1) + 32x(n) = f(n).$$

Bestem en følge $f(n)$, således at følgen $x_p(n) = 2^{n-1}$ er en partikulær løsning til differensligningen.

Indsæt på venstre side og regn ud:

$$2^{n+2-1} - 8 \cdot 2^{n+1-1} + 32 \cdot 2^{n-1} = (2 - 8 + 16)2^n = 10 \cdot 2^n$$

således, at svaret er $f(n) = 10 \cdot 2^n$

(c) Er de tre følger

$$x_1(n) = \frac{1}{n+1}, \quad x_2(n) = \frac{n}{n+1}, \quad x_3(n) = 3, \quad n \in \mathbf{N}_0$$

lineært uafhængige eller lineært afhængige? Svaret skal begrundes.

Vi har, at

$$3\left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) = 3,$$

således at

$$3x_1(n) + 3x_2(n) - x_3(n) = 0 \quad \text{for alle } n \in \mathbf{N}_0.$$

Det viser iflg. definitionen, at de tre følger er lineært afhængige.

Hvis man bruger Casoratideterminanten, så skal man huske, at for at vise lineær afhængighed, så skal man vise $W(n) \neq 0$ for alle $n \in \mathbf{N}_0$!

Opgave 3. Denne opgave omhandler lineær programmering.

(a) Betragt følgende problem, hvor c er et reelt tal, med $c \geq 3$.

Maksimér $cx_1 + x_2$

u.b.b.:

$$3x_1 + x_2 \leq 3,$$

$$x_1 + x_2 \leq 3/2,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$$

og løs det ved hjælp af simplexmetoden. Bemærk, at både simplextabellerne, de variable der er i basis'erne og deres værdier, den optimale løsning og objektfunktionens værdi i den optimale løsning skal angives.

x_1	x_2	x_3	x_4	M		x_1	x_2	x_3	x_4	M	
3	1	1	0	0	3	1	1/3	1/3	0	0	1
1	1	0	1	0	3/2	0	2/3	-1/3	1	0	1/2
$-c$	-1	0	0	1	0	0	$c/3 - 1$	$c/3$	0	1	c

$\rightarrow$

Basisvariable: $x_3 = 3, x_4 = 3/2$.

Basisvariable: $x_1 = 1, x_4 = 1/2$.

Optimal løsning er altså $x_1 = 1$ og $x_2 = 0$, optimalværdi $= M = c$.

- (b) Angiv skyggeprisen for kapacitetsbegrænsningen $3x_1 + x_2 \leq 3$.

Skyggeprisen er lig med $c/3$.

- (c) Opskriv det duale problem og løs dette grafisk, afhængig af hvad c er.
-

Minimér $3y_1 + 3/2y_2$

u.b.b.:

$$3y_1 + y_2 \geq c,$$

$$y_1 + y_2 \geq 1,$$

$$y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,$$

På en (y_1, y_2) graf ses det, at løsningen er $y_1 = c/3$ og $y_2 = 0$ for $c \geq 3$.

- (d) Forklar, hvordan følgende problem, som ikke er et lineært programmeringsproblem, kan løses ved, at man omformulerer det til et kanonisk lineært programmeringsproblem:

Maksimér $2(x_1 - 1) + x_2 - 1$

u.b.b.:

$$x_1^2 \leq 9,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$\frac{x_1}{x_2} \leq 3,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 > 0.$$

- (e) Løs dette problem grafisk.
-

Løsningen til følgende LP løser det oprindelige problem, når 3 fratrækkes den optimale værdi.

Maksimér $2x_1 + x_2$

u.b.b.:

$$x_1 \leq 3,$$

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4,$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 0,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 > 0.$$

Fra en (x_1, x_2) graf ses det, at den optimale løsning er $x_1 = 3$ og $x_2 = 3\frac{1}{2}$. Optimal værdi er $2 \cdot 3 + 3\frac{1}{2} = 9\frac{1}{2}$. Løsningen til det oprindelige problem er derfor $6\frac{1}{2}$.

Opgave 4. Denne opgave omhandler basal mikroøkonomi. En forbruger har nyttefunktionen $U(x_1, x_2) = -x_1^2 + 4x_1 - x_2^2 + 16x_2$, hvor $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$, når hun forbruger x_1 enheder af æbler og x_2 enheder af appelsiner. Forbrugeren har et budget på 32 at spendere på æbler og appelsiner. Hvert æble og hver appelsin koster 4.

- (a) Bestem marginalnyttten af æbler og marginalnyttten af appelsiner.

$$MU_1 = -2x_1 + 4, \quad MU_2 = -2x_2 + 16$$

- (b) Bestem det marginale substitutionsforhold (MRS) mellem de to varer.

$$MRS = -\frac{MU_1}{MU_2} = \frac{2x_1 - 4}{-2x_2 + 16}, \text{ for } x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0.$$

- (c) Opskriv forbrugeren budgetbegrænsning, og brug denne til at finde forbruget x_2 af appelsiner som funktion af forbruget x_1 af æbler.

$$4x_1 + 4x_2 \leq 32, \text{ og } x_1 > 0 \text{ og } x_2 > 0.$$

og derfor

$x_2 = 8 - x_1$, når alle 32, som det antages, bruges. Bemærk, at x_1 og x_2 ligger mellem 0 og 8.

- (d) Hvis forbrugeren vil maksimere sin nytte, hvordan kan hun så bruge informationen fra spørgsmål (c) til at finde den optimale kombination af x_1 og x_2 ?

Ved at indsætte i nyttefunktionen:

$$\begin{aligned} U(x_1, x_2(x_1)) &= -x_1^2 + 4x_1 - (8 - x_1)^2 + 16(8 - x_1) \\ &= -2x_1^2 + 4x_1 + 64. \end{aligned}$$

Denne maksimeres så mht. $0 < x_1 < 8$.

- (e) Find den optimale kombination af x_1 og x_2 .
-

Fås ved at maksimere ovenstående 2. gradspolynomium.

$$-4x_1 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Den optimale kombination er $x_1 = 1$ og $x_2 = 7$ (altså ét æble og syv appelsiner). Denne kombination ses ved kontrol at maksimere ovennævnte 2. gradspolynomium.
