Følsomhedsanalyse ud fra simplextabel (version 1.2)

Antag, at vi løser et LP maksimeringsproblem "i hånden", der så ender med en sidste optimal simplextabel. Vi ved, hvordan en optimal tabel ser ud: Den har ikke-negative værdier i sidste række, ikke-negative højre-side værdier og en basis (identitetsmatrix) indlejret i sig. For at bestemme effekten af ændringer i data, vi vil forsøge at bestemme, hvordan sådanne ændringer virker på den sidste simplextabel. Dette kaldes følsomhedsanalyse, eller på engelsk *sensitivity analysis.*

Koefficientændringer (prisændringer)

Her er spørgsmålet, hvor følsom er resultatet af vores løsning, hvis vi ændrer en koefficient i det oprindelige problem med en værdi som fx $0 \leq \Delta < 1$. Se for eksempel på problemet

$$\begin{aligned} &\max\,(3+\Delta)x_1 + 2x_2 \\ &\text{u.b.b.} \\ &x_1 + x_2 \leq 4 \\ &2x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

De tre simplextabeller hørende til dette problem –efter at der er tilføjet slackvariable x_3 og x_4 og variablen M– er

x_1	x_2	x_3	x_4	M	
1	1	1	0	0	4
2	1	0	1	0	6
$-(3+\Delta)$	-2	0	0	1	0

$\curvearrowright$

x_1	x_2	x_3	x_4	M	
0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	1
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	3
0	$\frac{\Delta-1}{2}$	0	$\frac{3+\Delta}{2}$	1	$9+3\Delta$

$\curvearrowright$

x_1	x_2	x_3	x_4	M	
0	1	2	-1	0	2
1	0	-1	1	0	2
0	0	$1-\Delta$	$1+\Delta$	1	$10+2\Delta$

med den sidste (og optimale) tabel nederst. Bemærk, at i optimum er x_1 og x_2 inde i basis med værdierne $x_1 = 2$, $x_2 = 2$. Slackvariablene x_3 og x_4 er begge nul. Og optimum er $(3+\Delta)\cdot 2 + 2\cdot 2 = 10 + 2\Delta$.

Repræsenterer denne tabel en optimal løsning? Det gør den kun, hvis alle elementerne i sidste række er ikke-negative. Dette gælder kun, hvis

$$1 - \Delta \geq 0 \text{ og } 1 + \Delta \geq 0,$$

hvilket gælder for $-1 \leq \Delta \leq 1$. Samtidig skal $\Delta \geq 0$, så $0 \leq \Delta \leq 1$. For enhver Δ i dette interval, så er vores tidligere basis (og variabelværdier) optimal. Objekfunktionen ændrer sig til $10 + 2\Delta$.

Ændringer i højesideværdierne

Hvad sker der, hvis vi ændrer på højresiderne? Altså, hvor følsom er vores løsningsresultat, hvis vi ændrer på højresideværdierne.

Betragt for eksempel LP problemet

$$\begin{aligned}&\max\ 4x_1 + 5x_2\\ &\text{u.b.b.}\\ &2x_1 + 3x_2 \leq 12 + \Delta\\ &x_1 + x_2 \leq 5\\ &x_1, x_2 \geq 0,\end{aligned}$$

hvor vi her for nemheds skyld antager, at $-1 \leq \Delta \leq 1$.

De tre simplextabeller hørende til dette problem, efter at der er tilføjet slackvariable x_3 og x_4 og variablen M, er følgende (hvor de røde tal til højre i tabellerne blot svarer til et eksempel med $\Delta = -1$):

x_1	x_2	x_3	x_4	M		
2	3	1	0	0	$12 + \Delta$	11
1	1	0	1	0	5	5
-4	-5	0	0	1	0	0

$\curvearrowright$

x_1	x_2	x_3	x_4	M		
$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$4 + \frac{\Delta}{3}$	$\frac{11}{3}$
$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	1	0	$1 - \Delta/3$	$\frac{4}{3}$
$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	1	$20 + \frac{5\Delta}{3}$	$\frac{55}{3}$

$\curvearrowright$

x_1	x_2	x_3	x_4	M		
0	1	1	-2	0	$2 + \Delta$	1
1	0	-1	3	0	$3 - \Delta$	4
0	0	1	2	1	$22 + \Delta$	21

med den sidste (og optimale) tabel nederst. Vi ser at x_1 og x_2 er i basis, og løsningen er $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3 - \Delta, 2 + \Delta, 0, 0)$. Den optimale værdi er $4(3 - \Delta) + 5(2 + \Delta) = 22 + \Delta$.

Tilsvarende, hvis vi ændrer højresiden af den anden bibetingelse fra 5 til $5 + \Delta$ i den oprindelige formulering, så vil vi få en objektfunktionsværdi på $22 + 2\Delta$ i den optimale tabel, så længe at $-1 \leq \Delta \leq 1$.

Skyggepriser

Måske det mest vigtige begreb i følsomhedsanalyse er skyggeprisen $\bar{y}_i$ af en begrænsning: Hvis højresiden af begrænsning i ændres med Δ i den oprindelige formulering, så ændrer den optimale objektfunktions værdi sig med $\bar{y}_i\Delta$. Skyggeprisen $\bar{y}_i$ kan findes i den optimale tabel, i nederste række. Den er "den reducerede omkostning" af den tilsvarende slackvariabel. Så den fås altså i sidste række i søjlen svarende til slackvariablen hørende til i'te begrænsning.