Repetition af kursusgang 10, IMAT og IMATØ

matematik og matematik-økonomi studierne – 1. basissemester

Esben Høg

23. november 2012

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Simplex metoden

1. Man vælger et hjørnepunkt (*extreme point*), $\mathbf{x}$, i den brugbare mængde $\mathfrak{F}$.
2. Betragt alle kanter i $\mathfrak{F}$, som mødes i $\mathbf{x}$. Hvis objektfunktionen, $f(\mathbf{x})$, ikke vokser ved at $\mathbf{x}$ flyttes langs en af disse kanter, så er $\mathbf{x}$ en optimal løsning.
3. Hvis $f(\mathbf{x})$ vokser ved at $\mathbf{x}$ bevæger sig ad en eller flere kanter, så følges den kant, som giver den største forøgelse af f, og der flyttes altså til punktet ved den anden ende af kanten. Ved denne proces sørger man for at vælge et *pivot* element.
4. Gentag processen startende ved punkt 2.

Slack variable

- Vi betragter igen det *kanoniske* maksimeringsproblem

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$$
$$\text{u.b.b.}$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \text{og } \mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

- Indfør m *slackvariable* $\mathbf{s} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})^T$, således at

$$\mathbf{s} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

- Slackvariable giver altså m ligninger med $n+m$ ubekendte:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{s} = \mathbf{b} \Leftrightarrow [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}] \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{s} \end{array} \right] = \mathbf{b} \Leftrightarrow \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b},$$

hvor vi har defineret $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$ og $\tilde{\mathbf{x}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{x} \\ \hline \mathbf{s} \end{array} \right]$.

Hjørnerne i den brugbare mængde

Hjørnerne i den brugbare mængde

- Hjørnerne i den brugbare mængde $\mathfrak{F}$ er de brugbare *basisløsninger* til $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$.
- En løsning er en *basisløsning*, når n af dets $n + m$ elementer (koordinater) er nul, og den er brugbar, når den tilfredsstiller både $\tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ og $\tilde{\mathbf{x}} \geq \mathbf{0}$.
- Første fase af simplex metoden finder en basisløsning.
- Anden fase af simplex metoden bevæger sig trinvist til den optimale løsning $\tilde{\mathbf{x}}^*$.

Simplexalgoritmen for et kanonisk LP problem

The Simplex Algorithm for a Canonical Linear Programming Problem

1. Change the inequality constraints into equalities by adding slack variables. Let M be a variable equal to the objective function, and below the constraint equations write an equation of the form

$$(\text{objective function}) - M = 0$$

2. Set up the initial simplex tableau. The slack variables (and M) provide the initial basic feasible solution.
3. Check the bottom row of the tableau for optimality. If all the entries to the left of the vertical line are nonnegative, then the solution is optimal. If some are negative, then choose the variable x_k for which the entry in the bottom row is as negative as possible.[3]
4. Bring the variable x_k into the solution. Do this by pivoting on the positive entry a_{pk} for which the nonnegative ratio b_i/a_{ik} is the smallest. The new basic feasible solution includes an increased value for M.
5. Repeat the process, beginning at step 3, until all the entries in the bottom row are nonnegative.

Minimeringsproblemer

- Minimeringsproblemer er lige så relevante som maksimeringsproblemer.
- Generelt vil man, for at løse et minimeringsproblem, transformere det til et maksimeringsproblem ved passende at ændre fortegn (gange igennem med -1) og vende ulighedstegn.
- Hvis nogle af koordinaterne til **b** er nul er det muligt at simplexmetoden går ind i en uendelig løkke, og således ikke konveregerer mod en optimal løsning (det sker dog i praksis sjældent).
- Hvis en af koordinaterne i **b** er negativ, kan det give problemer, for det ville betyde, at en slackvariabel så var negativ (og dermed ikke brugbar). I praksis løses dette ved at pivotere på en negativ indgang i simplextabellen. Metoden er glimrende beskrevet i praksis i [Lay] side 40.