

# Repetition af kursusgang 11, IMAT og IMATØ

matematik og matematik-økonomi studierne – 1. basissemester

Esben Høg

28. november 2012

Institut for Matematiske Fag  
Aalborg Universitet

# Primalt og Dualt problem

Det Primale problem  $P$     *versus*    Det Duale problem  $P^*$

$$\text{Maksimer } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

u.b.b.:

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

$$\text{Minimer } g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}$$

u.b.b.:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$$

- Bemærk hvordan koefficienterne  $c_i$  i  $P$  bliver højresidekonstanterne i  $P^*$ , og omvendt.
- Bemærk også, at ulighederne i  $P^*$  vender modsat ulighederne i  $P$  (altså bortset fra de to ikke-negativitetsbetingelser for hhv.  $\mathbf{x}$  og  $\mathbf{y}$ :
- Både  $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$  og  $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$ .

# DUALITETSTEORI

## Dualitetssætningen

Antag at det primale problem har en (endelig) optimal løsning. Da har det duale problem også en (endelig) optimal løsning, og de tilhørende to værdier af objektfunktionerne er lig med hinanden. Hvis det primale har ubegrænset maksimum, har det duale problem ingen brugbare løsninger.

Eller i denne version:

### THE DUALITY THEOREM

Let  $P$  be a (primal) linear programming problem with feasible set  $\mathcal{F}$ , and let  $P^*$  be the dual problem with feasible set  $\mathcal{F}^*$ .

- If  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{F}^*$  are both nonempty, then  $P$  and  $P^*$  both have optimal solutions, say  $\bar{\mathbf{x}}$  and  $\bar{\mathbf{y}}$ , respectively, and  $f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{y}})$ .
- If one of the problems  $P$  or  $P^*$  has an optimal solution  $\bar{\mathbf{x}}$  or  $\bar{\mathbf{y}}$ , respectively, then so does the other, and  $f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{y}})$ .

### THE DUALITY THEOREM (CONTINUED)

Let  $P$  be a (primal) linear programming problem and let  $P^*$  be its dual problem. Suppose  $P$  (or  $P^*$ ) has an optimal solution.

- If either  $P$  or  $P^*$  is solved by the simplex method, then the solution of its dual is displayed in the bottom row of the final tableau in the columns associated with the slack variables.

## Komplementær slackhed

- De optimale løsningsvektorer  $\bar{x}$  og  $\bar{y}$  til hhv.  $P$  og  $P^*$  opfylder **komplementær slackhed**:

Hvis  $(\mathbf{A}\bar{x})_j < b_j$  så er  $\bar{y}_j = 0$ , og hvis  $(\mathbf{A}^T\bar{y})_i > c_i$  så er  $\bar{x}_i = 0$ .

- Komplementær slackhed benævnes ikke sådan i bogen, men det er et vigtigt begreb. Det nævnes indirekte aller øverst side 50.
- Elementerne (koordinaterne) i  $\bar{y}$  kaldes **skyggepriser** (eller *marginal values*).
- $\bar{y}_j$ 'erne (altså skyggepriserne) fremgår af nederste række i sidste simplextabel for det primale LP problem.
- En tolkning af komplementær slackhed er, at hvis en ressource ikke udnyttes fuldtud, så er skyggeprisen (værdien af at få udvidet kapaciteten af ressourcen med én enhed) lig med nul.