

Repetition af kursusgang 8, IMAT og IMATØ

matematik og matematik-økonomi studierne – 1. basissemester

Esben Høg

19. november 2012

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

Matrix Games (*spilteori*)

- **Payoff** matricen er $(m \times n)$ matricen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. R er rækkespilleren og C er søjlespilleren.
- a_{ij} er beløb, som R vinder, hvis R spiller i , og C spiller j .
- Dvs. hvis a_{ij} er negativ, så er det C , der har vundet $|a_{ij}|$ fra R .
- a_{ij} kaldes et **saddelpunkt**, hvis a_{ij} både er minimum af række i og maksimum af søjle j .
- Strategirummet for spiller R er mængden af alle sandsynlighedsvektorer¹ i $\mathbb{R}^m$, og strategirummet for spiller C er mængden af alle sandsynlighedsvektorer i $\mathbb{R}^n$.
- Et element i et strategirum kaldes naturligt nok for en **strategi**.
- Hvis en strategi har én koordinat lig med 1 (og dermed alle andre koordinater lig med 0), så kaldes denne for en **ren strategi** i modsætning til en **mikset strategi**, som er en strategi, der ikke er en ren strategi.

¹En sandsynlighedsvektor er en vektor, hvor alle elementer er ikke-negative og summer til 1.

Strategier og forventet *payoff*

- Lad R have strategien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$, og C have strategien $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$.
- Situationen skal forstås sådan, at spiller R vælger at spille række i med sandsynlighed x_i , og spiller C vælger at spille søjle j med sandsynlighed y_j .
- Så er **forventet *payoff*** til spiller R defineret som

$$E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} y_j = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}.$$

Bemærk, at dette er en skalar, altså et tal.

- Groft sagt er $E(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ det gennemsnitlige beløb som C betaler til R pr. spil, hvis man forestiller sig, at R og C spiller et meget stort antal gange ved at bruge de respektive strategier $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$.

Hvordan forstås *min max* og *max min* ?

$$\begin{aligned}\max_{i=1,\dots,m} \left(\min_{j=1,\dots,n} a_{ij} \right) &= \max_{i=1,\dots,m} (\min(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})) \\ &= \text{den største værdi af de } m \text{ mindste værdier i rækkerne.}\end{aligned}$$

Eksempel:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Her er $m = 4$ og $n = 2$.

$$\begin{aligned}\max_{i=1,2,3,4} \left(\min_{j=1,2} a_{ij} \right) &= \max_{i=1,2,3,4} (\min(a_{i1}, a_{i2})) \\ &= \max(\min(a_{11}, a_{12}), \min(a_{21}, a_{22}), \min(a_{31}, a_{32}), \min(a_{41}, a_{42})) \\ &= \max(1, -3, 1, 3) \\ &= \text{den største værdi af de 4 mindste værdier i rækkerne.} \\ &= 3.\end{aligned}$$

Værdi af spil

- Skriv matricen $\mathbf{A}$ enten som n søjler, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 | \mathbf{a}_2 | \cdots | \mathbf{a}_n]$ eller som m rækker,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix}.$$

- **Værdien** $\nu(\mathbf{x})$ af at bruge strategien $\mathbf{x}$ defineres som det mindste forventede *payoff* som R får for det givne $\mathbf{x}$, dvs

$$\nu(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{y}} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

- Det kan vises (se [Lay] side 7), at $\nu(\mathbf{x}) = \min_{j=1, \dots, n} \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}_j = \min_{j=1, \dots, n} \mathbf{x}^T \mathbf{a}_j$.

- **Værdien** af hele spillet for spiller R defineres som

$$\nu_R = \max_{\mathbf{x}} \nu(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}} \min_{j=1, \dots, n} \mathbf{x}^T \mathbf{a}_j$$

- Tilsvarende størrelser defineres for spiller C : $\nu(\mathbf{y}) = \max_{i=1, \dots, m} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{a}}_i$, og

$$\nu_C = \min_{\mathbf{y}} \max_{i=1, \dots, m} \mathbf{x}^T \tilde{\mathbf{a}}_i.$$

Minimax theoremet

- En strategi $\hat{x}$ for R kaldes **optimal**, hvis $\nu(\hat{x}) = \nu_R$. Tilsvarende for spiller C .
- I et matrix spil, da gælder

$$\nu_R = \nu_C.$$

- Den fælles værdi $\nu = \nu_R = \nu_C$ af spillet kaldes af gode grunde **spilletets værdi**.
- Ethvert par af optimale strategier $(\hat{x}, \hat{y})$ kaldes en **løsning** til spillet.