Noter til kursusgang 9, IMAT og IMATØ

matematik og matematik-økonomi studierne – 1. basissemester

Esben Høg

4. november 2013

Institut for Matematiske Fag
Aalborg Universitet

- Det **duale** problem.
- I dette setup (se næste slide) kaldes det kanoniske problem for det **primale problem**.
- Det duale problem få direkte ud fra det primale problem.

Primalt og Dualt problem

Det Primale problem P	*versus*	Det Duale problem P^*
$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^\top \mathbf{x}$		$\min_{\mathbf{y}} g(\mathbf{y}) = \mathbf{b}^\top \mathbf{y}$
u.b.b.:		u.b.b.:
$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$		$\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \geq \mathbf{c}$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$		$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$

- Bemærk hvordan koefficienterne c_i i P bliver højresidekonstanterne i P^*, og omvendt.
- Bemærk også, at ulighederne i P^* vender modsat ulighederne i P (altså bortset fra de to ikke-negativitetsbetingelser for hhv. $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$:
- Både $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ og $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

- Det duale kan omskrives til:

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{y}} \; -g(\mathbf{y}) = -\mathbf{b}^\top \mathbf{y}\\ &\text{u.b.b.:}\\ &\;-\mathbf{A}^\top \mathbf{y} \leq -\mathbf{c}, \qquad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

- Jamen så er det duale til dette problem jo pr. definition af "det duale":

$$\begin{aligned}&\min_{\mathbf{w}} \; -\mathbf{c}^\top \mathbf{w}\\ &\text{u.b.b.:}\\ &\;-(\mathbf{A}^\top)^\top \mathbf{w} \geq -\mathbf{b}, \qquad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

- Det vil sige (på kanonisk form):

$$\begin{aligned}&\max_{\mathbf{w}} \; \mathbf{c}^\top \mathbf{w}\\ &\text{u.b.b.:}\\ &\;\mathbf{A}\mathbf{w} \leq \mathbf{b}, \qquad \mathbf{w} \geq \mathbf{0}\end{aligned}$$

som præcist er det oprindelige primale problem.

DUALITETSTEORI

Dualitetssætningen

Antag at det primale problem har en (endelig) optimal løsning. Da har det duale problem også en (endelig) optimal løsning, og de tilhørende to værdier af objektfunktionerne er lig med hinanden. Hvis det primale har ubegrænset maksimum, har det duale problem ingen brugbare løsninger.

Eller i denne version:

THE DUALITY THEOREM

Let P be a (primal) linear programming problem with feasible set $\mathscr{F}$, and let P^* be the dual problem with feasible set $\mathscr{F}^*$.

a. If $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}^*$ are both nonempty, then P and P^* both have optimal solutions, say $\bar{\mathbf{x}}$ and $\bar{\mathbf{y}}$, respectively, and $f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{y}})$.

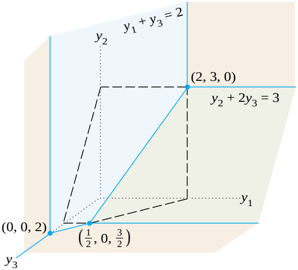
b. If one of the problems P or P^* has an optimal solution $\bar{\mathbf{x}}$ or $\bar{\mathbf{y}}$, respectively, then so does the other, and $f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{y}})$.

THE DUALITY THEOREM (CONTINUED)

Let P be a (primal) linear programming problem and let P^* be its dual problem. Suppose P (or P^*) has an optimal solution.

c. If either P or P^* is solved by the simplex method, then the solution of its dual is displayed in the bottom row of the final tableau in the columns associated with the slack variables.

Det duale problem (fortsat)



$\mathbf{y}$	$g(\mathbf{y})$
(0, 0, 2)	108
$\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$	96 ←
(2, 3, 0)	120

FIGURE 1 The minimum of $g(y_1, y_2, y_3) = 30y_1 + 20y_2 + 54y_3$.

Det duale problem (fortsat)

- To restriktioner i det duale:

$$\mathbf{A}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 + y_3 &\geq 2 \\ y_2 + 2y_3 &\leq 3 \\ y_1, y_2, y_3 &\geq 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \text{ 3 hjørnepunkter } \begin{array}{ll} (0,0,2): & 108 \\ (\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}): & 96 \\ (2,3,0): & 120 \end{array}$$

- Bemærk, at sidste række i sidste simplextabel giver den optimale løsning til det duale problem. Se nederst side 47, eksempel 2.

Fra eksempel 6 side 37

- x_1 = antal kasser med mix1 af nødder
- x_2 = antal kasser med mix2 af nødder

$$\begin{aligned}
&\max_{\mathbf{w}} \; 2x_1 + 3x_2 \\
&\text{u.b.b.:} \\
&\; x_1 \leq 30, \quad \text{(cashews)} \\
&\; x_2 \leq 20, \quad \text{(filberts)} \\
&\; x_1 + 2x_2 \leq 54, \quad \text{(peanuts)} \\
&\; x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

- Hvis antal cashews til rådighed forøges fra 30 til $30 + h$, så kan vi se af det duale problem taget i den optimale løsning $\bar{\mathbf{y}}$

$$f(\bar{\mathbf{x}}) = g(\bar{\mathbf{y}}) = 30\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 + 54\bar{y}_3,$$

  at så ville gevinsten stige med $h\bar{y}_1$, fordi der så ville så

$$(30 + h)\bar{y}_1 + 20\bar{y}_2 + 54\bar{y}_3.$$

- Så altså: $\bar{y}_1$ repræsenterer værdien pr. vægtenhed af at forøge (eller formindske) mængden af cashews til rådighed. Det kaldes marginalværdien af cashews, eller bedre skyggeprisen af cashews. Kaldes også nogle gange for alternativomkostninger.
- Dvs. hvor meget man er villig til at betale for yderligere ressourcer af cashews.
- Se nu eksempel 4 side 49.

Komplementær slackhed

- De optimale løsningsvektorer $\bar{\mathbf{x}}$ og $\bar{\mathbf{y}}$ til hhv. P og P^* opfylder **komplementær slackhed**:

$$\text{Hvis } (\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}})_j < b_j \text{ så er } \bar{y}_j = 0, \quad \text{og} \quad \text{hvis } (\mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{y}})_i > c_i \text{ så er } \bar{x}_i = 0.$$

- Komplementær slackhed benævnes ikke sådan i bogen, men det er et vigtigt begreb. Det nævnes indirekte aller øverst side 50.
- Elementerne (koordinaterne) i $\bar{\mathbf{y}}$ kaldes **skyggepriser** (eller *marginal values*).
- $\bar{y}_j$'erne (altså skyggepriserne) fremgår af nederste række i sidste simplextabel for det primale LP problem.
- En tolkning af komplementær slackhed er, at hvis en ressource ikke udnyttes fuldtud, så er skyggeprisen (værdien af at få udvidet kapaciteten af ressourcen med én enhed) lig med nul.