

# Prøveopgave A

Matematik 1A, efteråret 2006

Aalborg Universitets basisuddannelse

Studerende i Industri og Sundhedsteknologi

Et køletårn  $K$  er støbt i beton. Idet man negligerer tykkelsen af væggen, er  $K$  beskrevet ved ligningen

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2. \quad (1)$$

Desuden er  $|z| \leq h$ . Herved er  $a > 0$  og  $h > 0$  to givne konstanter.

1. Skitser  $K$  i et  $xyz$ -koordinatsystem efter følgende fremgangsmåde:

Forklar, at delen af  $K$  beliggende i planen med  $x = 0$  udgør en hyperbel.

Godtgør at fladen  $K$  er rotationssymmetrisk omkring  $z$ -aksen.

(Fladen givet ved (1) kaldes en *omdrejningshyperboloide*.)

2. Vis at tangentplanen til  $K$  i  $P_1(x_1, y_1, z_1)$  er givet ved ligningen

$$x_1x + y_1y - z_1z = a^2.$$

3. Lad  $P_0(x_0, y_0, 0) \in K$ . Vis at de to rette linier med parameterfremstillingerne

$$\begin{aligned} (x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, a), \quad t \in \mathbf{R} \\ (x_0, y_0, 0) + t \cdot (-y_0, x_0, -a), \quad t \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

begge er indeholdt i fladen bestemt ved (1); og at de også er indeholdt i tangentplanen til  $K$  i  $P_0$ .

Hvordan kan dette udnyttes konstruktivt, når  $K$  skal bygges i praksis?

4. Bestem for givne konstanter  $a$  og  $h$  rumfanget af en væske, der fylder hele køletårnet.

## Teorispørgsmål:

Gradient for en funktion  $f(x, y, z)$  af tre variable. Niveauflader  $f(x, y, z) = c$ , deres tangent- og normalvektorer samt tangentplan.