Prøveopgave C

Matematik 1A, efteråret 2006

Aalborg Universitets basisuddannelse

Studerende i Industri og Sundhedsteknologi

En ingeniør ønsker at undersøge, hvorledes en væske strømmer gennem et rør (−en blodåre, haveslange, gasledning, pipeline etc.−). Røret er cirkulært cylindrisk af længde L og diameter D; cylinderens akse tænkes placeret vandret langs et koordinatsystems z-akse.

Ingeniøren regner på det simple tilfælde, at væsken strømmer stationært, således at hastighedsvektoren i alle punkter har formen $\vec{v} = (0, 0, w)$. Strømningen antages endvidere *laminær*, dvs. w kun afhænger af afstanden til z-aksen: Med polære koordinater (r, θ) i xy-planen, er w altså en funktion af r, skrevet $w(r)$. Endelig forventes w at være en aftagende funktion af r og at væsken ligger stille ved rørvæggen.

Trykfaldet i væsken betegnes med $p_1 - p_2 > 0$ (målt i $\mathrm{N/m^2}$). Langs en koncentrisk cylinderflade forventer ingeniøren en *forskydningsspænding* τ, som er en kraft per arealenhed, hvis størrelse, ved hjælp af den dynamiske viskositet μ, med god tilnærmelse kan sættes til

$$\tau = \mu \left| \frac{dw}{dr} \right|. \tag{1}$$

(Begrundelsen er at molekylær diffusion dels bringer væske med lavere fart ind gennem cylinderfladen, hvad der bremser; dels bringer væske med højere fart ud gennem fladen, hvad der accelererer væsken udenfor. Jo større fartforskelle, desto større effekt; derfor antages T proportional med $|\frac{dw}{dr}|$.)

1. Lav en skitse af en cylinderskal med indre radius $r \in]0, D/2[$ og tykkelse Δr samt længde L. Find arealet af dens tværsnit og krumme overflader, og begrund med en kraftligevægt at

   $$(p_1 - p_2)\pi((r+\Delta r)^2 - r^2) + \mu 2\pi(r+\Delta r)L\frac{dw}{dr}(r+\Delta r) - \mu 2\pi r L \frac{dw}{dr}(r) = 0.$$

   Udled ved hjælp af grænseovergangen $\Delta r \to 0$ at w er løsning til differentialligningen

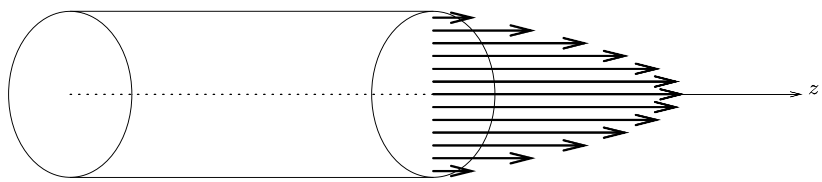
   $$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right) = -\frac{p_1 - p_2}{\mu L} r, \quad \text{for} \quad 0 < r < \frac{D}{2}. \tag{2}$$

2. Forklar at ligningen (2) løses af alle funktioner af formen

$$w(r) = A \ln r + B - \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} r^2, \qquad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Begrund at den konkrete situation fører til den kvadratiske hastighedsprofil, jævnfør figuren,

$$w(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L}((\frac{D}{2})^2 - r^2) \quad \text{for} \quad 0 \leq r \leq \frac{D}{2}. \tag{3}$$



3. Forklar ved hjælp af Riemann-summer at fluxen F (målt i m^3/s) gennem et tværsnit S er givet ved planintegralet

$$F = \iint_S w\, dA.$$

Udled heraf at

$$F = \frac{\pi}{128\mu} \frac{p_1 - p_2}{L} D^4. \tag{4}$$

4. Godtgør følgende tabeller over fluxen F som funktion af D; henholdsvis over det nødvendige trykfald per længde $\frac{p_1 - p_2}{L}$ til opretholdelse af F:

diam.	flux
D	F
$1,10D$	$1,46F$
$1,25D$	$2,44F$
$1,50D$	$5,06F$

diam.	trykfald
D	$(p_1 - p_2)/L$
$0,95D$	$1,23(p_1 - p_2)/L$
$0,90D$	$1,52(p_1 - p_2)/L$
$0,85D$	$1,92(p_1 - p_2)/L$

Overvej det plausible i at beskedne ændringer har så store effekter. [1]

Teorispørgsmål:

Forklar hvorfor og hvordan et planintegral kan udregnes i polære koordinater.

[1] Formlerne (3) og (4) opnåedes empirisk af den franske læge J.-L.-M. Poiseuille (1840). Poiseuille studerede hvorledes åreforkalkning medfører forhøjet blodtryk, jævnfør tabellen for $p_1 - p_2$; se nærmere i [EP] eksempel 6.1.6 og opgave 6.1.49. Situationen i opgaven kaldes en *Poiseuille-strømning.*