Matematik 3
6. januar 2014

OPGAVE 1:

(a) Da Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ er lineær fås

$$\mathcal{L}(y'') + 7\,\mathcal{L}(y') + 12\,\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t))$$

Pga. formlerne

$$\mathcal{L}(y') = s\cdot Y(s) - y(0)$$
$$\mathcal{L}(y'') = s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0)$$

giver oplysningerne $y(0) = 2$; $y'(0) = 3$ at

(*) $$(s^2 Y(s) - s\cdot 2 - 3) + 7(s\,Y(s) - 2) + 12\,Y(s) = \mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t))$$

På højresiden udnyttes at

$$\mathcal{L}(\sin(2t)) = \mathcal{L}(\sin(\omega t))\Big|_{\omega=2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\Big|_{\omega=2} = \frac{2}{s^2+2^2}$$

som pga. forskydningssætningen giver

$$\mathcal{L}(e^{-t}\sin(2t)) = \frac{2}{(s+1)^2+4}.$$

Ved indsættelse i (*) fås derfor

$$(s^2 + 7s + 12)\,Y(s) = \frac{2}{(s+1)^2+4} + 2s + 17.$$

Dette er billedligningen for problemet.

(b) Da $\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}$ gælder for alle a, så er

$$\mathcal{L}(e^{at} - e^{bt}) = \mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{bt})$$
$$= \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s-b}$$
$$= \frac{(s-b)\cdot 1 - (s-a)\cdot 1}{(s-a)(s-b)} = \frac{a-b}{(s-a)(s-b)}$$

For $a \neq b$ kan vi dividere med $a-b \neq 0$ og opnår derved den første formel:

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{a-b}\mathcal{L}(e^{at}-e^{bt}) = \mathcal{L}\left(\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}\right)$$

Den anden formel fås på samme måde:

$$\mathcal{L}\left(\frac{ae^{at}-be^{bt}}{a-b}\right) = \frac{a}{a-b}\mathcal{L}(e^{at}) - \frac{b}{a-b}\mathcal{L}(e^{bt})$$

$$= \frac{a}{a-b}\cdot\frac{1}{s-a} - \frac{b}{a-b}\cdot\frac{1}{s-b}$$

(fælles brøkstreg) $\quad = \dfrac{a\cdot(s-b) - b\cdot(s-a)}{(a-b)(s-a)(s-b)}$

(gange ud i tælleren) $\quad = \dfrac{as-bs}{(a-b)(s-a)(s-b)}$

(forkortes m. $a-b$) $\quad = \dfrac{(a-b)s}{(a-b)(s-a)(s-b)} = \underline{\underline{\dfrac{s}{(s-a)(s-b)}}}$

Da også $\mathcal{L}^{-1}$ er lineær, så giver disse formler at

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+17}{(s+3)(s+4)}\right) = 2\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+3)(s+4)}\right) + 17\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)(s+4)}\right)$$

($a=-3$, $b=-4$) $\quad = 2\cdot\dfrac{(-3)e^{-3t}-(-4)e^{-4t}}{(-3)-(-4)} + 17\,\dfrac{e^{-3t}-e^{-4t}}{-3-(-4)}$

(nævner $=1$) $\quad = -6e^{-3t}+8e^{-4t}+17e^{-3t}-17e^{-4t}$

$$= \underline{\underline{11e^{-3t}-9e^{-4t}}}$$

(c) Fra billedligningen i (a) fås

$$Y(s) = \frac{2}{((s+1)^2+4)(s+3)(s+4)} + \frac{2s+17}{(s+3)(s+4)}$$

fordi $s^2+7s+12 = (s+3)(s+4)$, da rødderne ses at være $s=-3$, $s=-4$.

Da $\mathcal{L}^{-1}$ er lineær, så fås pga. (b) at

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{((s+1)^2+4)(s+3)(s+4)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s+17}{(s+3)(s+4)}\right)$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{((s+1)^2+4)(s+3)(s+4)}\right) + 11e^{-3t} - 9e^{-4t}$$

Da $(s+1)^2+4 = s^2+2s+5$ har de komplekse rødder $s = -1 \pm i2$ søges en stambrøksdekomposition af formen

$$G(s) = \frac{2}{(s^2+2s+5)(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+1+i2} + \frac{D}{s+1-i2}$$

Her kan A bestemmes ved at indsætte $s=-4$ i udtrykket $(s+4)G(s)$, da alle andre led på højre side indeholder faktoren $s+4$, som giver nul. Dvs.

$$A = (s+4)G(s)\Big|_{s=-4} = \frac{2}{((s+1)^2+4)(s+3)}\Big|_{s=-4} = \frac{2}{(9+4)(-1)} = -\frac{2}{13}$$

$$B = (s+3)G(s)\Big|_{s=-3} = \frac{2}{((s+1)^2+4)(s+4)}\Big|_{s=-3} = \frac{2}{(4+4)\cdot 1} = \frac{1}{4}$$

$$C = (s+1+i2)G(s)\Big|_{s=-1-i2} = \frac{2}{(s+1-i2)(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-1-i2}$$

$$= \frac{2}{(-i4)(2-i2)(3-i2)} = \frac{1}{-20-i4} = \frac{-5+i}{104}$$

$$D = (s+1-i2)G(s)\Big|_{s=-1+i2} = \frac{2}{(s+1+i2)(s+3)(s+4)}\Big|_{s=-1+i2}$$

$$= \frac{2}{i4(2+i2)(3+i2)} = \frac{1}{-20+i4} = \frac{-5-i}{104}$$

Ialt fås

$$\frac{2}{((s+1)^2+4)(s+3)(s+4)} = \frac{-2/13}{s+4} + \frac{1/4}{s+3} + \frac{(-5+i)(s+1-i2)+(-5-i)(s+1+i2)}{(s^2+2s+5)\cdot 104}$$

(Kan også fås på anden måde)

$$= -\frac{2}{13}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+3} + \frac{-5s-3}{52((s+1)^2+4)}$$

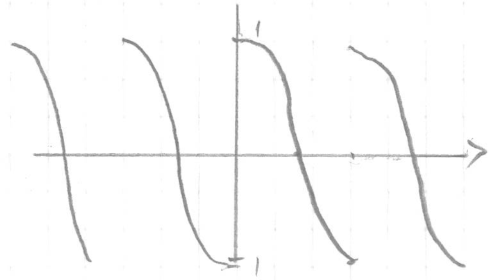
Her $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\sin(2t)$ og $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\cos(2t)$
så

$$y(t) = (11+\tfrac{1}{4})e^{-3t} - (9+\tfrac{2}{13})e^{-4t} + e^{-t}\left(\frac{-5}{52}\cos(2t) + \frac{1}{52}\sin(2t)\right)$$

$$= \frac{45}{4}e^{-3t} - \frac{119}{13}e^{-4t} + \frac{1}{52}e^{-t}(\sin(2t) - 5\cos(2t))$$

OPGAVE 2:

(a) Funktionen



$$r(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 \le t \le \pi \\ -\cos t & \text{for } -\pi < t < 0 \end{cases}$$

er ulige, for hvis $0 \le t \le \pi$ så har man (idet $-t < 0$) at

$$r(-t) = -\cos(-t) = -\cos(t) = -r(t)$$

mens der for $t \in]-\pi, 0[$ gælder at $-t > 0$ så

$$r(-t) = \cos(-t) = \cos(t) = -r(t).$$

Funktionens Fourierrække har derfor kun sinus-led:

$$r(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt).$$

Da funktionen er ulige er koefficienterne givet ved

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} r(t)\sin(nt)\,dt$$

Det giver

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(e^{it}+e^{-it})\frac{1}{2i}(e^{int}-e^{-int})\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\pi} e^{i(n+1)t} - e^{-i(n+1)t} + e^{i(n-1)t} - e^{-i(n-1)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} - \frac{e^{-i(n+1)t}}{-i(n+1)} + \frac{e^{i(n-1)t}}{i(n-1)} - \frac{e^{-i(n-1)t}}{-i(n-1)}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left(-\frac{2\cos((n+1)\pi) - 2}{n+1} - \frac{2\cos((n-1)\pi) - 2}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1+(-1)^{n}}{n+1} + \frac{1+(-1)^{n}}{n-1}\right) = \begin{cases} 0, & \text{for ulige } n \\ \frac{4}{\pi}\cdot\frac{n}{(n+1)(n-1)}, & \text{for } n \text{ lige} \end{cases}$$

$$r(t) = \sum_{n \text{ lige}} \frac{4}{\pi}\frac{n}{n^2-1}\sin(nt) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{2}{1\cdot 3}\sin(2t) + \frac{4}{3\cdot 5}\sin(4t) + \dots\right)$$

(b) Hvis $y'' - 9y' + 14y = r$ har en løsning $y(t)$ der er 2π-periodisk, så har $y(t)$ en Fourierrække

$$y(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt)\right)$$

Her er

$$y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-nA_n \sin(nt) + nB_n \cos(nt)\right)$$

$$y''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-n^2 A_n \cos(nt) - n^2 B_n \sin(nt)\right)$$

Som ved indsættelse giver

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left((14-n^2)A_n - 9nB_n\right)\cos(nt) + \left(9nA_n + (14-n^2)B_n\right)\sin(nt)\right) + 14A_0$$
$$= 0 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(0 \cdot \cos(nt) + \frac{2(1+(-1)^n)}{\pi} \frac{n}{n^2-1} \sin(nt)\right)$$

Da funktionerne på højre og venstre side er ens, så er deres Fourier koefficienter ens, dvs.

$$A_0 = 0 \text{ og } \begin{cases} (14-n^2)A_n - 9nB_n = 0 \\ 9n \cdot A_n + (14-n^2)B_n = \dfrac{2(1+(-1)^n)}{\pi} \cdot \dfrac{n}{n^2-1} \end{cases}$$

(sidste udtryk læses som 0 for $n=1$).

Determinanten er $D_n = (14-n^2)^2 + 81n^2$

så

$$A_n = \frac{1}{D_n}\left(0 - (-9n)\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi}\frac{n}{n^2-1}\right) = \frac{18n^2(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)D_n}$$

$$B_n = \frac{1}{D_n}\left((14-n^2)\frac{2(1+(-1)^n)}{\pi}\frac{n}{n^2-1} - 0\right) = \frac{(28n-2n^3)(1+(-1)^n)}{\pi(n^2-1)D_n}$$

Fordi $1+(-1)^n = \begin{cases} 2 \text{ for } n \text{ lige} \\ 0 \text{ for } n \text{ ulige} \end{cases}$, så fås i alt

$$\underline{\underline{y(t) = \sum_{n \text{ lige}} \left(\frac{36n^2}{\pi(n^2-1)D_n}\cos(nt) + \frac{56n-4n^3}{\pi(n^2-1)D_n}\sin(nt)\right)}}$$

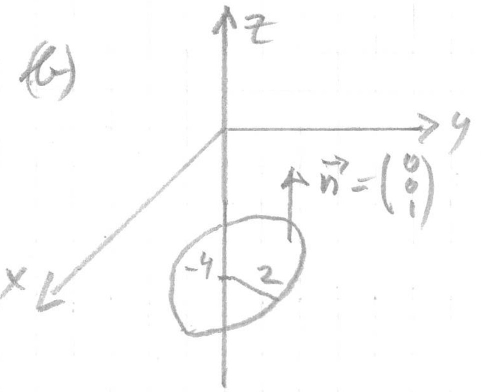
OPGAVE 3:

NB! $(\tan z)' = 1+\tan^2 z$

(a) $$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 4x^2y+\sin z & 7y^2x+\tan z & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \partial_y(0) - \partial_z(7y^2x+\tan z) \\ -\partial_x(0) + \partial_z(4x^2y+\sin z) \\ \partial_x(7y^2x+\tan z) - \partial_y(4x^2y+\sin z) \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -1-\tan^2 z \\ \cos z \\ 7y^2-4x^2 \end{pmatrix}}}$$

(b)



Cirkelskiven S har radius 2, idet $x^2+y^2 \leq 2^2$

Centrum er $(0,0,-4)$, og den er parallel med xy-planet.

S har parameterfremstillingen
$$\vec{r}(\rho,\theta) = \begin{pmatrix}0\\0\\-4\end{pmatrix} + \rho\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix}, \text{ med } 0\leq\theta\leq 2\pi,\ 0\leq\rho\leq 2.$$

Normalvektoren $\vec{n}$ er $\vec{k}$ eller $-\vec{k}$, da den er en enhedsvektor; og pga. kravet $\vec{n}\cdot\vec{k}>0$ ses at $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Derfor:
$$\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = 7y^2-4x^2.$$

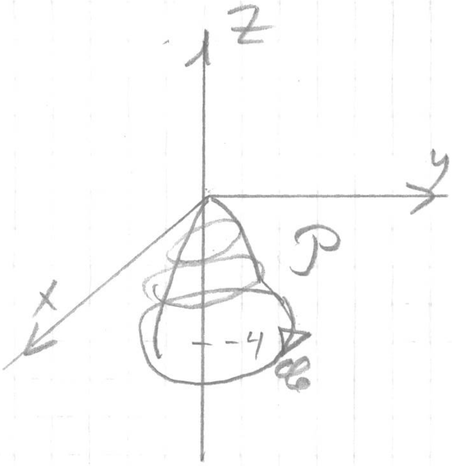
Så ved integration over S i polære koord.

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (7y^2-4x^2)\,r\,dr\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}(7\sin^2\theta - 4\cos^2\theta)\int_0^2 r^3\,dr\,d\theta$$
$$= \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2\left(7\cdot\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta - 4\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\right)$$
$$= 2^{4-2}(7\cdot\pi - 4\cdot\pi)$$
$$= 4\cdot 4\pi \qquad = \underline{\underline{16\pi}}$$

(c) Fladen $\mathcal{P}$ har samme randkurve $\mathcal{C}$ som S, men kravet

$$\vec{p} \cdot \vec{k} < 0$$

betyder at $\vec{p}$ har negativ z-koordinat.



Derfor gennemløbes $\mathcal{C}$ <u>med</u> uret i x-y-planen, dvs i negativ omløbsretning, for at få en <u>højreskrue</u>.

Da det modsatte er tilfældet for S, så giver Stokes's rotationssætning at

$$\iint_{\mathcal{P}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{p}\, dA = \oint_{\mathcal{C}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$= -\oint_{\circlearrowleft} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \underset{(b)}{=} \underline{\underline{-16\pi}}$$

OPGAVE 4:

(a) Det er velkendt at

$$\cos z = 1 - \tfrac{1}{2} z^2 + \tfrac{1}{4!} z^4 - \dots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}$$

så

$$f(z) = 5\pi z + \cos(\pi z) = \underline{\underline{1 + 5\pi z + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \pi^{2m} z^{2m}}}$$

$$= 1 + 5\pi z - \frac{\pi^2}{2} z^2 + \frac{\pi^4}{4!} z^4 - \dots$$

Konvergensradius R opfylder $R = \infty$, idet rækken for $\cos z$, og dermed for $\cos(\pi z)$, er konvergent for alle $z \in \mathbb{C}$.

Alternativt: $R = \lim_m \frac{|a_{2m}|}{|a_{2m+2}|} = \lim_m \frac{\pi^{2m}}{(2m)!} \frac{(2m+2)!}{\pi^{2m+2}} = \lim_{m\to\infty} \frac{(2m+2)(2m+1)}{\pi^2} = \underline{\underline{\infty}}$

(b) Vi skriver $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$, hvorved u, v har reelle verdier og $z = x + iy$.

$$\begin{aligned}
f(z) &= \cos(\pi z) + 5\pi z \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}\right) + 5\pi(x+iy) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{i\pi x - \pi y} + e^{-i\pi x + y\pi}\right) + 5\pi x + i\,5\pi y \\
&= \tfrac{1}{2}\left(e^{-\pi y}(\cos(\pi x) + i\sin(\pi x)) + e^{\pi y}(\cos(\pi x) - i\sin(\pi x))\right) \\
&\qquad + 5\pi x + i\,5\pi y \\
&= \left(\cos(\pi x)\cosh(\pi y) + 5\pi x\right) \\
&\qquad + i\left(-\sin(\pi x)\sinh(\pi y) + 5\pi y\right)
\end{aligned}$$

Så er

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\pi\sin(\pi x)\cosh(\pi y) + 5\pi = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \pi\cos(\pi x)\sinh(\pi y) + 0 = -\frac{\partial v}{\partial x}
\end{aligned}\right\}\ \text{Dvs. Cauchy-Riemann er opfyldt}$$

(c) Iflg (b), så er $f(z)$ analytisk for alle $z \in \mathbb{C}$. Den er derfor konform i området hvor

$$f'(z) \neq 0 \quad (\text{Thm. 17.1 i Kreyzig})$$

Nu er $\quad f'(z) = -\pi\sin(\pi z) + 5\pi$

Så

$$\begin{aligned}
f'(z) = 0 &\iff \sin(\pi z) = 5. \\
&\iff e^{i\pi z} - e^{-i\pi z} = 5 \cdot 2i = 10i \\
&\iff e^{i2\pi z} - i10\,e^{i\pi z} - 1 = 0 \\
&\iff e^{i\pi z} = e^{i\pi x - \pi y} = \tfrac{1}{2}\left(i10 \pm \sqrt{-100+4}\right) \\
&\iff e^{-y\pi}\cos(\pi x) + i\,e^{-y\pi}\sin(\pi x) = 0 + i\left(5 \pm \sqrt{24}\right)
\end{aligned}$$

$\cos(\pi x) = 0$ giver nu $\pi x = \frac{\pi}{2} + p\pi,\ p \in \mathbb{Z}$, dvs $x = \frac{1}{2} + p,\ p \in \mathbb{Z}$.

p kan ej være lige da $\sin(\pi x) > 0$ er nødv. $(5 - \sqrt{24} > 0)$

Undtagelsespunkterne er: $z = x + iy$, $\quad \underline{x = \frac{1}{2} + 2m,\ m \in \mathbb{Z}}$

$\underline{y = \pm\frac{1}{\pi}\ln(5 + \sqrt{24})}$.