Forslag til besvarelse vedr. 6. januar 2015

Opgave 1: Opgaven er analog til Ex. 6.7.1 i [K]; jvf. notat fra 17/9/2014 på websted.

(a) Først Laplacetransformeres begge ligninger. Idet

$$\mathcal{L}(f') = sF(s) - f(0)$$

fås

$$\begin{cases} sY_1(s) - y_1(0) + 3Y_1(s) + 5Y_2(s) = \mathcal{L}(\sin(4t)) \\ s\cdot Y_2(s) - y_2(0) - 5Y_1(s) - 3Y_2(s) = -\mathcal{L}(\cos(4t)) \end{cases}$$

Fordi $y_1(0) = 5$, $y_2(0) = -3$ giver dette billedligningerne

$$(B)\quad \begin{cases} (s+3)Y_1(s) + 5Y_2(s) = 5 + \frac{4}{s^2+4^2} \\ -5Y_1(s) + (s-3)Y_2(s) = -3 - \frac{s}{s^2+4^2} \end{cases}$$

(b) Ligningssystemet (B) har $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ som de ubekendte. Derfor er dets determinant

$$D = \begin{vmatrix} s+3 & 5 \\ -5 & s-3 \end{vmatrix} = (s+3)(s-3) + 25$$
$$= s^2 - 9 + 25 = \underline{s^2 + 4^2}$$

Af Cramers regel fås så

$$Y_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} 5 + 4/(s^2+4^2) & 5 \\ -3 - s/(s^2+4^2) & s-3 \end{vmatrix}}{D} = \frac{+5(s-3) + \frac{4s-12}{s^2+4^2} + 15 + \frac{5s}{s^2+4^2}}{s^2+4^2}$$

Idet $-5\cdot 3$ og 15 udligner hinanden, fås ialt

$$Y_1(s) = 5\cdot\frac{s}{s^2+4^2} + \frac{9s}{(s^2+4^2)^2} - 12\cdot\frac{1}{(s^2+4^2)^2}$$

Fordi $\mathcal{L}^{-1}$ er lineær giver formlerne 21–22 i Tabel 6.9 at

$$y_1(t) = 5\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4^2}\right) + 9\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4^2)^2}\right) - 12\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4^2)^2}\right)$$

$$= 5\cdot\cos(4t) + 9\cdot\frac{1}{2\cdot 4}\cdot t\sin(4t) - 12\cdot\frac{1}{2\cdot 4^3}\left(\sin(4t) - 4t\cos(4t)\right)$$

$$= \left(5 + \frac{6}{16}t\right)\cos(4t) + \left(\frac{9}{8}t - \frac{6}{64}\right)\sin(4t)$$

Dvs.

$$\underline{\underline{y(t) = \left(5 + \frac{3}{8}t\right)\cos(4t) + \left(\frac{9}{8}t - \frac{3}{32}\right)\sin(4t)}}$$

Dette stemmer overens med opgaven.

(c) På samme vis får man

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s+3 & 5+4/(s^2+4^2) \\ 5 & -4/(s^2+4^2) \end{vmatrix}}{D} = \frac{-3s-9-\frac{s^2+3s}{s^2+4^2}+25+\frac{20}{s^2+4^2}}{s^2+4^2}$$

$$= -3\frac{s}{s^2+4^2} + 4\frac{4}{s^2+4^2} + \frac{-s^2-3s+20}{(s^2+4^2)^2}$$

hvor 21–23 i Tabel 6.9 giver

$$y_2(t) = -3\cos(4t) + 4\sin(4t) - 3\frac{1}{2\cdot 4}t\sin(4t)$$

$$+ 20\cdot\frac{1}{2\cdot 4^3}\left(\sin(4t) - 4t\cos(4t)\right)$$

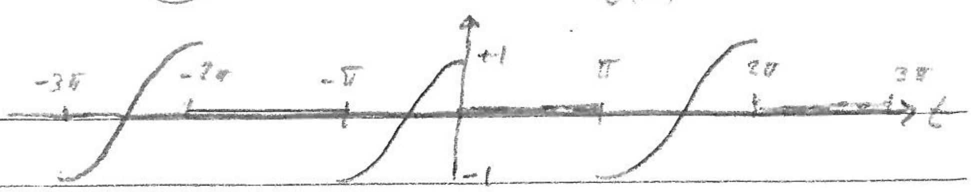
$$- \frac{1}{2\cdot 4}\left(\sin(4t) + 4t\cos(4t)\right)$$

$$= \left(-3 - \frac{t}{2} - \frac{10}{16}\right)\cos(4t) + \left(4 + \frac{5}{32} - \frac{1}{8} - \frac{3}{8}t\right)\sin(4t)$$

$$= \underline{\underline{\left(-3 - \frac{5}{8} - \frac{1}{2}t\right)\cos(4t) + \left(4 + \frac{1}{32} - \frac{3}{8}t\right)\sin(4t)}}$$

NB! Alternativt kan (c) regnes ved at indsætte udtrykket for $y_1(t)$ – givet i (b) – i ligningen med $y_1'(t)$; derefter isoleres $y_2(t)$.

OPGAVE 2:



(a) Formlen for de komplekse Fourierkoefficienter c_n giver

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\, e^{-int}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos t \cdot e^{-int}\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 0\, dt$$

Eulers formel

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(e^{it} + e^{-it}\right) e^{-int}\, dt + 0$$

(*)

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(e^{i(1-n)t} + e^{-i(1+n)t}\right) dt.$$

For $1-n \neq 0$ og $1+n \neq 0$, dvs. for $n \neq \pm 1$, fås så

$$c_n = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{e^{i(1-n)t}}{i(1-n)} + \frac{e^{-i(1+n)t}}{-i(1+n)}\right]_{t=-\pi}^{t=0}$$

$$= \frac{-1}{4\pi i}\left(\frac{1-e^{i(n-1)\pi}}{n-1} + \frac{1-e^{i(n+1)\pi}}{n+1}\right)$$

Idet $e^{i(n+1)\pi} = (-1)^{n+1}$ for alle n fås så

$$c_n = \frac{i}{4\pi}\cdot\frac{(n+1)(1-(-1)^{n-1}) + (n-1)(1-(-1)^{n+1})}{(n-1)(n+1)}$$

$$= \frac{i}{4\pi}\cdot\frac{2n(1+(-1)^n)}{(n-1)(n+1)}$$

Dvs.

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{, for } n \text{ ulige } (n \neq \pm 1) \\ \frac{i}{\pi}\cdot\frac{n}{n^2-1} & \text{, for } n \text{ lige.} \end{cases}$$

NB! $n = \pm 1$: Dog viser separat udregning i (*) at

$$c_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{0} \left(1 + e^{-i2t}\right) dt = \frac{1}{4\pi}\left[t + \frac{e^{-i2t}}{-i2}\right]_{t=-\pi}^{t=0}$$

altså

$\underline{\underline{c_1 = \frac{1}{4}}}$ pga 2π-periodicitet af e^{it}.

$\underline{\underline{c_{-1} = \frac{1}{4}}}$ ses helt analogt.

Dermed er

$$r(t) = \frac{1}{4}(e^{it} + e^{-it}) + \sum_{n \text{ lige}} \frac{i}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2-1} e^{int}$$

(b) En 2π-periodisk partikulærløsning til

$$y''(t) + 10y'(t) + 21y(t) = r(t)$$

har en kompleks Fourierrække af formen $\quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{int}$.

Nu er $y'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} in K_n e^{int}$, $\quad y''(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (in)^2 K_n e^{int}$

så ved indsættelse fås

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-n^2 + i10n + 21) K_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

Da Fourierkoefficienterne af en funktion er entydigt bestemte, sluttes heraf at

$$(-n^2 + i10n + 21) K_n = c_n \quad \text{for alle } n.$$

Her er $-n^2 + i10n + 21 \neq 0$ — " —,
da imaginærdelen $10n$ kun er nul for $n=0$ (hvor realdelen er 21), så

$$K_n = \frac{c_n}{21 + i10n - n^2} \quad \text{for alle } n.$$

Indsættelse i Fourierrækken for $y(t)$ giver

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{21 + i10n - n^2} e^{int},$$

dvs

$$y(t) = \frac{1}{80 + i40} e^{it} + \frac{1}{80 - i40} e^{-it}$$

$$+ \sum_{n \text{ lige}} \frac{i}{\pi} \cdot \frac{n}{(n^2-1)(21 + i10n - n^2)} e^{int}$$

(5)

(c) Fordi $a_n = c_n + c_{-n}$ for $n \geq 0$

$b_n = i(c_n - c_{-n})$ for $n \geq 0$

fås

$$a_1 = \frac{1}{80+i40} + \frac{1}{80-i40} = \frac{(80-i40)+(80+i40)}{80^2-(i40)^2} = \frac{160}{6400+1600}$$

$$= \frac{16}{700} = \frac{8}{350}$$

mens

n lige: $$a_n = \frac{i}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\left(\frac{n}{21+i10n-n^2} + \frac{-n}{21-i10n-(-n)^2}\right)$$

$$= \frac{i}{\pi}\frac{1}{n^2-1}\cdot\frac{-i20n^2}{(21-n^2)^2-(i10n)^2}$$

n lige: $$b_n = i\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}\cdot\left(\frac{n}{21+i10n-n^2} - \frac{-n}{21-i10n-(-n)^2}\right)$$

$$= i\frac{i}{\pi}\cdot\frac{1}{n^2-1}\cdot\frac{42n-2n^3}{(21-n^2)^2-(i10n)^2}$$

n ulige: $b_n = 0$, $a_n = 0$

Derved kan løsningen $y(t)$ fra (b) også skrives med den reelle Fourierrække

$$y(t) = \frac{8}{350}\cos t$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{\substack{n \text{ lige} \\ n \geq 2}}\left(\frac{10n^2}{(n^2-1)D_n}\cos(nt) + \frac{n^3-21n}{(n^2-1)D_n}\sin(nt)\right)$$

hvor

$$D_n = (21-n^2)^2 + 100n^2$$

er benyttet for overskuelighedens skyld.

Opgave 3

(a) Definitionen af kurveintegral giver
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t))\cdot \vec{r}\,'(t)\,dt$$
hvor C er cirklen med centrum i (0,0) og radius $r=3$. Denne har parameterfremstillingen
$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{pmatrix}, \quad 0=a\le t\le b=2\pi$$
Integranden er derfor
$$\vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{r}\,' = \begin{pmatrix} \frac{-3\sin t}{(3\cos t)^2+(3\sin t)^2} \\ \frac{3\cos t}{9\cos^2 t+9\sin^2 t} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -3\sin t \\ 3\cos t \end{pmatrix}$$
$$= \frac{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}{9\cos^2 t+9\sin^2 t} = 1.$$
Man finder derfor at
$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r})\cdot\vec{r}\,'\,dt = \int_0^{2\pi} 1\cdot dt = \underline{\underline{2\pi}}$$
NB. Greens sætning i planen kan ikke benyttes, da der er "hul" i området: $(x,y)\neq(0,0)$.

(b) En funktion $f(x,y)$ er et potential for $\vec{F}(x,y)$ dersom $\nabla f(x,y) = \vec{F}(x,y)$.

I så fald er
$$\frac{\partial f}{\partial x} = F_1 = \frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$
Stamfunktion heraf kan fås vha. arctan, se f.eks. side 2 i [K]:
$$f(x,y) = \int \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx = -y\int\frac{1}{x^2+y^2}\,dx = -y\left(\frac{1}{y}\arctan\left(\frac{x}{y}\right)+k\right),$$
hvor k er en konstant (afhængig af y).

Da også $-y \cdot k$ er funktion af y, kaldet $g(y)$, fås

$$f(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)$$

Her bestemmes $g(y)$ vha. F_2:

$$F_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + g(y)\right)$$

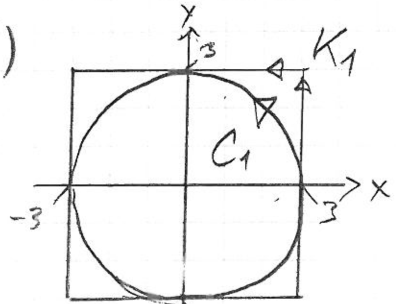
$$= -\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + g'(y)$$

$$= \frac{x}{y^2+x^2} + g'(y) \qquad = F_2 + g'(y)$$

Heraf ses at $g'(y) = 0$, så $g(y)$ er konstant. F.eks. kan vi sætte $g(y) = 0$, dvs. $\vec{F}$ har

<u>potential $f(x,y) = -\arctan\left(\frac{x}{y}\right)$, $y \neq 0$</u>

(c)



Kvadratet K består af de (x,y) hvor $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 3$.

I 1. kvadrant består C af en kvartcirkel C_1, og randen af K har en kurve K_1 bestående af rette liniestykker fra $(3,0)$ til $(3,3)$, og videre til $(0,3)$. Men som vist i (b) har $\vec{F}$ et potential i 1. kvadrant, så kurveintegralerne med $\vec{F}$ er <u>stiuafhængige</u>: Fordi C_1 og K_1 har fælles endepunkter i både $(3,0)$ og $(0,3)$ gælder så at

$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{K_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Tilsvarende kan C_2 sluttes til K_2, C_3 til K_3 og C_4 til K_4.

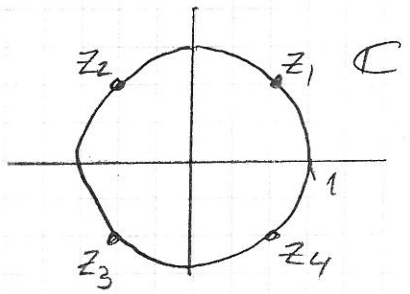
Opgave 4:

(a) Funktionen $f(z)$ reduceres først:

$$f(z) = \frac{z^3}{z^5+z} = \frac{z\cdot z^2}{z(z^4+1)} = \frac{z^2}{z^4+1}.$$

Nævnerens nulpunkter, dvs løsningerne til $z^4+1=0$, er de 4 enhedsrødder af 4. orden:

$$z_1 = e^{i\pi/4}$$
$$z_2 = e^{i3\pi/4}$$
(de Moivre)
$$z_3 = e^{i5\pi/4}$$
$$z_4 = e^{i7\pi/4}$$



$f(z)$ er derfor defineret for alle andre komplekse tal z end z_1, z_2, z_3, z_4. Dvs. for $z \in \mathbb{C}\setminus\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$

$f(z)$ er komplekst differentiabel i alle punkter z i definitionsmængden, idet regnereglerne giver

$$f'(z) = \frac{2z(z^4+1) - z^2(4z^3+0)}{(z^4+1)^2} = \frac{-3z^5+2z}{(z^4+1)^2}$$

Derfor er $f(z)$ analytisk.

(b) Nulpunkterne for $f(z)$ fås ved at løse ligningen $f(z)=0$, eller

$$\frac{z^2}{z^4+1} = 0$$

Da brøken er 0 netop når tælleren er nul, så er kravet $z^2=0$, som kun løses for $z=0$

Nu er

$$\text{(N)} \qquad f(z) = z^2\cdot g(z), \quad \text{for } g(z) = \frac{1}{z^4+1},$$

og da $g(z) \neq 0$ nær $z=0$, så ses af (N) at nulpunktet $z=0$ har orden 2.

Fordi $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$
aflæses at

<u>$f(z)$ har simple poler i z_1, z_2, z_3, z_4.</u>

[F.eks. ses mere præcist at

$$f(z) = \frac{1}{z-z_1} \cdot h(z), \text{ hvor } h(z) = \frac{z^2}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$$

er analytisk i en omegn af z_1, så dens Taylor række giver

$$f(z) = \frac{h(z_1)}{z-z_1} + h'(z_1) + \tfrac{1}{2}h''(z_1)(z-z_1)^{2-1} + \ldots$$

(C) Kun polerne z_1, z_2 tilhører den øvre halvplan hvor $\operatorname{Im} z > 0$. Da de er simple, benyttes

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)} .$$

Så fås

$$\operatorname{Res}_{z_1} f(z) = \frac{z^2}{4z^3+0}\bigg|_{z=z_1} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 2}}{4e^{i\frac{\pi}{4}\cdot 3}} = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}}}$$

$$\operatorname{Res}_{z_2} f(z) = \frac{e^{i\frac{3}{4}\pi\cdot 2}}{4e^{i\frac{3}{4}\pi\cdot 3}} = \tfrac{1}{4}e^{i\frac{3}{4}\pi(2-3)} = \underline{\underline{\tfrac{1}{4}e^{-i\frac{3}{4}\pi}}}$$

(d) Nu er $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx$ pga. (a)

Da grad$(x^4+1) = 4 \geq 2 +$ grad(x^2), så giver residuesætningen, jvf. s. 727 i [K], at

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+1}\,dx = 2\pi i \cdot (\operatorname{Res}_{z_1} f(z) + \operatorname{Res}_{z_2} f(z))$$

$$= 2\pi i \cdot \tfrac{1}{4}(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4})$$

$$= \frac{\pi}{2}\cdot i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \underline{\underline{\frac{\pi}{\sqrt{2}}}}$$

$\boxed{\text{NB. } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$