**Oversigt nr. 1**

**Gl. eksamensopgave:** Betragt begyndelsesværdiproblemet givet ved $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ og ligningen $y''(t) + 9y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t < 2, \\ t-2, & \text{for } t \geq 2. \end{cases}$$

1. (5 point) Omskriv begyndelsesværdiproblemet således at begyndelsesbetingelserne ligger ved $t = 0$.

2. (20 point) Anvend Laplacetransformationen til at finde $y(t)$.

**Gl. eksamensopgave i Fourieranalyse:** (jan. 2012) Betragt differentialligningen $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er den $2\pi$-periodiske funktion defineret ved:

$$r(t) = \begin{cases} \pi^2 - t^2, & \text{for } -\pi \leq t < 0, \\ \pi^2 + t^2, & \text{for } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

1.(5 point) Vis at r(t) kan skrives som en sum af en lige og en ulige funktion.

2.(10 point) Find Fourierrækken for $r(t)$.

3.(15 point) Find den periodiske partikulærløsning til ligningen.

**Gl. eksamensopgave i vektoranalyse:** (jan. 2012) Betragt vektorfeltet $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^6 - z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x^5z^3 + x)\mathbf{k}$ og fladen $S$ med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(\rho,\phi) = 2\rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{k},$$

hvorved $0 \leq \rho \leq 5$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

1.(5 point) Beregn $\nabla \times \mathbf{F}(x,y,z)$.

2.(10 point) Beregn $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n}\, dA$.

3.(10 point) Beregn $\int_{C_\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, når $C_\gamma$ betegner kurven med parameterfremstillingen $\gamma(t) = 10\cos t\mathbf{i} + 5\sin t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

**Gl. eksamensopgave i komplekse funktioner:** (jan. 2011) Betragt funktionen givet ved $f(z) = |2z + \bar{z}|^2$, hvor $z = x + \mathrm{i}\,y$ for reelle tal $x, y$.

1. Find to reelle funktioner $u$ og $v$ sådan at $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$ for alle $z$. Vis at $f(z)$ ikke er analytisk.

2. Lad $\gamma$ betegne cirklen med radius 2, centrum i $z_0 = \mathrm{i}$ og orientering mod uret. Beregn det komplekse kurveintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

**Oversigt nr. 2**

Som lovet ved den sidste forelæsning bringes her en mindre samling af de resterende gamle eksamensopgaver:

**(jan. 2013)** Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = e^{-t} & \text{for } t > 0, \\ y(0) = -1, \\ y'(0) = 4. \end{cases}$$

(1) Anvend Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ til at finde løsningen $y(t)$. Man kan benytte at

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{s+5}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\Big(\frac{1}{6}\sinh t + \frac{1}{24}(e^{-5t} - e^{-t})\Big). \qquad (\dagger)$$

(2) Eftervis at der om foldningen $e^{at} * e^{bt}$, for $a \neq b$, gælder formlen

$$e^{at} * e^{bt} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).$$

Bestem $\mathcal{L}(e^{at} * e^{bt})$.

(3) Udled formlen ($\dagger$).

**(jan. 2013)** Lad $r(t)$ betegne den $2\pi$-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{for } 0 \le t \le \pi, \\ -\pi - t & \text{for } -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

(1) Vis at $r(t)$ er en ulige funktion.

(2) Opskriv Fourierrækken for $r(t)$.

(3) Bestem en $2\pi$-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) - 3y'(t) + 28y(t) = r(t).$$

**(jan. 2013)** Lad $S$ betegne fladen i $\mathbb{R}^3$ med parameterfremstillingen, hvor $0 \le \rho \le 1$ og $0 \le \phi \le 2\pi$,

$$\vec{r}(\rho, \phi) = (\rho\cos\phi, 2\rho\sin\phi, -1 - \rho^2(\cos^2\phi + 4\sin^2\phi)),$$

Desuden betragtes vektorfeltet $\vec{F} = (2xy^3\cos^2 z, 3x^2y^2\cos^2 z, -x^2y^3\sin(2z))$.

(1) Angiv ved en ligning sammenhængen mellem $x$, $y$ og $z$ for hvert punkt $(x, y, z) \in S$.

(2) Bestem $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, når $C$ betegner randkurven af $S$ med parameterfremstillingen $\vec{r}(1,\phi)$.

(3) Beregn fluxen $\int_s (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA$, idet $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ betegner normalvektorfeltet på $S$.

**(januar 2011)** 1. Anvend Laplace transformationen til at løse ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2,$$

med begyndelsesbetingelsen $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$.

**(januar 2011)** 2. Betragt vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (0, -xz, y^2 x)$. Lad $\sigma$ være fladen med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(u, v) = (u + v, u^2, v^2), \qquad u^2 + v^2 \leq 1,$$

og lad $C$ betegne kurven givet ved

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t + \sin t, \cos^2 t, \sin^2 t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(i) Beregn $\int_\sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, idet $\vec{n}$ betegner $\sigma$'s normalvektor.

(ii) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$. Hvorfor får man samme resultat ?

**(januar 2011)** 3. Betragt ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t),$$

hvor den ydre kraft $r(t)$ er den $2\pi$-periodiske funktion der er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & \text{for } -\pi < t < 0, \\ -t^2/\pi + \pi/2, & \text{for } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Vis at $r(t)$ hverken er lige eller ulige.

Find en $2\pi$-periodisk partikulærløsning til ligningen.

**(jan. 2012)** 1. Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$ konvergerer for alle $z$ i det komplekse plan $\mathbb{C}$.

Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$. Da potensrækken for konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$ er $f(z)$ analytisk i hele $\mathbb{C}$.

2. Lad $C_3(0)$ betegne cirklen med radius 3 og centrum i $z_0 = 0$ og orienteret mod uret. Beregn

$$\int_{C_3(0)} \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

**(feb. 2013)** (1) Forklar hvorfor

$$\mathcal{L}(u(t-1)e^t) = \frac{e^{1-s}}{s-1},$$

idet $\mathcal{L}$ betegner Laplacetransformationen og $u(t)$ står for Heaviside funktionen.

(2) Anvend $\mathcal{L}$ til at finde løsningen $y_1(t)$, $y_2(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) - 4y_2(t) + u(t-1)e^t, & y_1(0) = 3, \\ y_2'(t) = y_1(t) - 3y_2(t) + u(t-1)e^t, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

**(feb. 2013)** Lad $r(t)$ betegne den $2\pi$-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = t^2, \quad \text{for } -\pi \leq t \leq \pi.$$

(1) Opskriv Fourierrækken for $r(t)$.

(2) Bestem en $2\pi$-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) - 12y'(t) + 5y(t) = r(t).$$

**(feb. 2013)** Foruden vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2 \tan z, 2x^3y \tan z, x^3y^2(\cos z)^{-2})$ betragtes en kurve $C$ med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(\phi) = (2, 2\cos\phi + 1, \frac{\pi}{3} + 2\sin\phi), \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

(1) Vis at $C$ er en cirkelbue, og karakteriser denne.

(2) Udregn divergensen og rotationen af $\vec{F}$.

(3) Bestem kurveintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

**(feb. 2013)** (1) Bestem konvergensradius $R$ for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

Begrund at sumfunktionen $g(z)$ er analytisk i cirkelskiven $|z-1| < 1$.

(2) Udled at $G(z)$ er analytisk i halvplanen hvor $\operatorname{Re} z > 0$, idet

$$G(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + \mathrm{i}\arctan(\frac{y}{x}), \qquad z = x + \mathrm{i}\,y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(3) Vis at $G(z) = g(z)$ når $|z-1| < 1$. (*Vink:* Man kan bestemme en potensrække for $G$.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen