Eksamenopgaver fra 2011–2016

(jan. 2016) Givet at $r(t) = 0$ for $0 < t < 1$ mens $r(t) = e^{-(t-1)}\cos(7(t-1))$ for $t \geq 1$, betragt da begyndelsesværdiproblemet for $t > 0$:

$$y''(t) + 2y'(t) + 50y(t) = r(t), \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = -9.$$

(a) Bestem den Laplacetransformerede $\mathcal{L}(e^{-t}\cos(7t))$ og angiv billedligningen for $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$.

(b) Opskriv et udtryk for $Y(s)$ og beregn de inverst transformerede af de led, hvori $y(0)$ og $y'(0)$ indgår. (*Vink:* Man kan udnytte at $s^2 + 2s + 50 = (s+1)^2 + 7^2$.)

(c) Bestem løsningen $y(t)$.

(jan. 2016) (a) Lad $f(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at $f(t) = e^{-3t}$ for $0 \leq t < \pi$ mens $f(t) = 0$ for $-\pi \leq t < 0$. Udregn ved integration koefficienterne c_n i den komplekse Fourierrække $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nt}$.

(b) Bestem den komplekse Fourierrække $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ for den 2π-periodiske løsning $y(t)$ til

$$y''(t) + 5y'(t) - 3y(t) = r(t),$$

hvorved $r(t)$ har komplekse Fourierkoefficienter $c_n = 1/(4+n^2)$ for $n \neq 0$, mens $c_0 = 7$.

(c) Opskriv den reelle Fourierrække for funktionen $y(t)$ fra (b), og afgør dernæst om $y(t)$ er en lige eller ulige funktion eller ingen af delene.

(jan. 2016) (a) Bestem $\operatorname{rot}\vec{F}$ for vektorfeltet $\vec{F} = \big(6x^2z^4+2xz^3, 2yz^3, 8(xz)^3+3(x^2+y^2)z^2\big)$, og begrund at $\vec{F}$ har et potential.

(b) Bestem en funktion $f(x,y,z)$ sådan at $\vec{F} = \operatorname{grad} f$.

(c) Benyt en hovedsætning til at bestemme kurveintegralet $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, idet C med positiv orientering gennemløber de punkter (x,y,z) som opfylder $x^2 + y^2 = 4$ og $z = 0$.

(jan. 2016) (a) Bestem radius og centrum i konvergenscirklen for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(6+8\,\mathrm{i})^n}(z+3+2\,\mathrm{i})^n.$$

(b) Brug Cauchy-produktet til at bestemme koefficienterne a_n for $n \geq 0$ i potensrækken med $z_0 = 0$ for

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\operatorname{Ln}(1-z).$$

(c) Brug Cauchy–Riemann ligningerne til at afgøre ved hvilke $z \in \mathbb{C}$, om nogen, funktionen $e^{\bar{z}}$ er analytisk.

(jan. 2015) Betragt begyndelsesværdiproblemet for $t > 0$:

$$\begin{cases} y_1'(t) + 3y_1(t) + 5y_2(t) = \sin(4t), & y_1(0) = 5, \\ y_2'(t) - 5y_1(t) - 3y_2(t) = -\cos(4t), & y_2(0) = -3. \end{cases}$$

(a) Bestem billedligningerne for de Laplacetransformerede funktioner $Y_1(s) = \mathcal{L}y_1(s)$, $Y_2(s) = \mathcal{L}y_2(s)$.

(b) Udregn determinanten D for billedligningerne og brug den til at vise at

$$y_1(t) = (5 + \frac{3}{8}t)\cos(4t) + (\frac{9}{8}t - \frac{3}{32})\sin(4t).$$

(c) Bestem funktionen $y_2(t)$.

(jan. 2015) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = \begin{cases} 0 & \text{for } 0 \le t < \pi, \\ \cos t & \text{for } -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

(a) Vis ved integration at $r(t)$ har en kompleks Fourierrække $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ med koefficienter $c_n = \frac{\mathrm{i}}{\pi}\frac{n}{n^2-1}$ for n lige, og med $c_n = 0$ for ulige $n \neq \pm 1$. Udregn også c_1 og c_{-1}.

(b) Bestem den komplekse Fourierrække $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ for den 2π-periodiske løsning $y(t)$ til

$$y''(t) + 10y'(t) + 21y(t) = r(t).$$

(c) Opskriv den reelle Fourierrække for funktionen $y(t)$ fra (b).

(jan. 2015) Her betragtes vektorfeltet $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^2$ givet ved $\vec{F} = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$ for $(x, y) \neq (0, 0)$.

(a) Lad C betegne cirklen hvor $x^2 + y^2 = 9$, med positiv orientering (dvs. mod uret). Beregn værdien af kurveintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(b) Bestem et potential for $\vec{F}$ og angiv, hvor det er defineret.

(c) Begrund teoretisk at $\int_K \vec{F} \cdot d\vec{r}$ har samme værdi som i (a), når K betegner den positivt orienterede rand af kvadratet hvori $|x| \le 3$, $|y| \le 3$. (*Vink:* Betragt en kvadrant ad gangen.)

(jan. 2015) (a) Angiv definitionsmængden D for

$$f(z) = \frac{z^3}{z^5 + z}$$

og begrund at f er analytisk.

(b) Bestem funktionens nulpunkter og poler, og angiv disses orden.

(c) Udregn f's residuer i de poler, som tilhører halvplanen hvor $\operatorname{Im} z > 0$.

(d) Brug residueintegration til at udlede at $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

(feb. 2015) Betragt begyndelsesværdiproblemet for $t > 0$:

$$y''(t) - 10y'(t) + 16y(t) = te^{5t}\cos(3t), \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6.$$

(a) Bestem billedligningen for den Laplacetransformerede funktion $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$ ved hjælp af formlen

$$\mathcal{L}(t\cos(\beta t)) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}. \tag{$*$}$$

(b) Udled formlen $(*)$.

(c) Bestem løsningen $y(t)$.

(feb. 2015) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = \sinh(t) \quad \text{for } -\pi \le t < \pi.$$

(a) Vis ved integration at $r(t)$ har en kompleks Fourierrække $r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ med koefficienter $c_n = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\frac{\mathrm{i}\,n(-1)^n}{n^2+1}$ for alle heltal n.

(b) Bestem den komplekse Fourierrække $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ for den 2π-periodiske løsning $y(t)$ til

$$y''(t) + 3y'(t) - 17y(t) = r(t).$$

(c) Opskriv den reelle Fourierrække for løsningen $y(t)$ fra punkt (b), og afgør dernæst om $y(t)$ er en lige eller ulige funktion eller ingen af delene.

(feb. 2015) Her betragtes vektorfeltet $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^3$ givet ved $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}(-y, z^3, x)$.

(a) Lad C betegne cirklen i x,y-planet givet ved $x^2+y^2=1$, med positiv orientering (dvs. mod uret). Beregn værdien af kurveintegralet $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$.

(b) Afgør om $\vec{F}$ har et potential $f(x,y,z)$, og angiv i så fald f.

(c) Bestem fladeintegralet $\int_P (\operatorname{rot}\vec{F})\cdot\vec{n}\,dA$, idet P betegner paraboloiden givet ved at

$$z = 1 - x^2 - y^2 \qquad \text{og} \qquad z \ge 0,$$

og enhedsnormalvektoren $\vec{n}$ er valgt således at $\vec{n}\cdot\vec{k} < 0$ f.eks. i punktet $(0,0,1)$.

(feb. 2015) (a) Angiv definitionsmængden D for

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$$

og begrund at f er analytisk på D.

(b) Bestem funktionens nulpunkter og poler, og angiv disses orden.

(c) Udregn f's residuer i de poler, som tilhører halvplanen hvor $\operatorname{Im} z > 0$.

(d) Brug residueintegration til at udlede at $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

(aug. 2015) Betragt begyndelsesværdiproblemet for $t > 0$:

$$y''(t) + 6y'(t) + 13y(t) = e^{-3t}\cos(2t), \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$$

(a) Bestem billedligningen for den Laplacetransformerede funktion $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$.

(b) Angiv den invers Laplacetransformerede af de led i $Y(s)$, der hidrører fra $y(0)$ eller $y'(0)$.

(c) Bestem løsningen $y(t)$.

(aug. 2015) (a) Lad $f(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at $f(t) = \cosh(3t)$ for $-\pi \le t < \pi$. Udregn ved integration koefficienterne c_n i den komplekse Fourierrække $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\mathrm{i}\,nt}$.

(b) Bestem den komplekse Fourierrække $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} K_n e^{\mathrm{i}\,nt}$ for den 2π-periodiske løsning $y(t)$ til

$$y''(t) + 7y'(t) - 13y(t) = r(t),$$

hvor $r(t)$ er en anden funktion havende komplekse Fourier koefficienter givet ved $c_n = (-1)^n \frac{3}{9+n^2}$.

(c) Opskriv den reelle Fourierrække for løsningen $y(t)$ fra punkt (b), og afgør dernæst om $y(t)$ er en lige eller ulige funktion eller ingen af delene.

(aug. 2015) Her betragtes vektorfeltet $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^3$ givet ved $\vec{F}(x,y,z) = (-4x^2y + z^3y, x^3 - 3z^2x, (x+y+z)^4)$.

(a) Bestem for vektorfeltet $\vec{F}$ dets rotation $\operatorname{rot}\vec{F}$ og dets divergens $\operatorname{div}\vec{F}$.

(b) Lad C betegne cirklen i x,y-planet givet ved $x^2 + y^2 = 1$, med positiv orientering. Beregn værdien af kurveintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(c) Bestem fladeintegralet $\int_S (\operatorname{rot}\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA$, idet S betegner kuglesfæren givet ved at

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

og enhedsnormalvektoren $\vec{n}$ er valgt således at $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$ i punktet $(0,0,1)$.

(aug. 2015) Her betragtes funktionerne af det komplekse tal z givet ved

$$f_1(z) = 3\frac{\sin z}{z}, \quad f_2(z) = \frac{1}{|z|}, \quad f_3(z) = \sin(\frac{3}{z}), \quad f_4(z) = \frac{\sin(3z)}{z^4}.$$

(a) Angiv hvilken af disse funktioner, der har hævelig singularitet i $z = 0$, og bestem denne funktions potensrække i udviklingspunktet $z_0 = 0$, inklusive rækkens konvergensradius.

(b) Angiv den af funktionerne, der har pol i $z = 0$, og bestem såvel ordenen m af polen som funktionens Laurentrække i $z_0 = 0$. (De første 3 led i rækken vil være tilstrækkeligt.)

(c) Udregn $\int_C \frac{\sin(3z)}{z^4}\, dz$, idet C betegner enhedscirklen med positiv orientering.

(jan. 2014) Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + 7y'(t) + 12y(t) = e^{-t}\sin(2t) & \text{for } t > 0, \\ y(0) = 2, & \\ y'(0) = 3. & \end{cases}$$

(a) Bestem billedligningen for den Laplacetransformerede funktion $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$.

(b) Find $\mathcal{L}^{-1}$ af $(2s+17)/((s+3)(s+4))$ ved først at eftervise formlerne, for $a \neq b$,

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \mathcal{L}(\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})), \qquad \frac{s}{(s-a)(s-b)} = \mathcal{L}(\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})).$$

(c) Bestem løsningen $y(t)$.

(jan. 2014) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = \begin{cases} \cos t & \text{for } 0 \le t \le \pi, \\ -\cos t & \text{for } -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

(a) Afgør om $r(t)$ er lige eller ulige, og udnyt dette til at bestemme Fourierrækken for $r(t)$.

(b) Bestem en 2π-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) - 9y'(t) + 14y(t) = r(t).$$

(jan. 2014) Her betragtes vektorfeltet $\vec{F}$ i $\mathbb{R}^3$ givet ved $\vec{F} = (4x^2y + \sin z, 7y^2x + \tan z, 0)$.

(a) Eftervis at $\operatorname{rot} \vec{F}$ er lig med $(-1 - \tan^2 z, \cos z, 7y^2 - 4x^2)$.

(b) Lad S betegne cirkelskiven bestående af de punkter $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ som opfylder

$$x^2 + y^2 \le 4, \quad z = -4.$$

Beregn da fladeintegralet $\iint_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, idet enhedsnormalvektoren $\vec{n}$ til S er valgt så $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

(c) Bestem fluxen $\iint_P \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{p}\, dA$, idet P betegner fladen givet ved

$$P = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4, \quad z = -x^2 - y^2 \,\}$$

og $\vec{p}$ betegner den enhedsnormalvektor til P som opfylder $\vec{p} \cdot \vec{k} < 0$.

(jan. 2014) (a) Bestem potensrækken med udviklingspunkt $z_0 = 0$ for funktionen

$$f(z) = \cos(\pi z) + 5\pi z$$

og angiv dens konvergensradius.

(b) Vis ved indsættelse at $f(z)$ løser Cauchy-Riemanns ligninger i ethvert punkt $z \in \mathbb{C}$.

(c) Bestem det område D i $\mathbb{C}$, hvori $f(z)$ er en konform afbildning.

(feb. 2014) Betragt differentialligningen $y''(t) - 9y(t) = \cosh(2t)$ for $t > 0$ med begyndelsesbetingelserne $y(0) = 0$ og $y'(0) = 6$.

(a) Bestem billedligningen for den Laplacetransformerede funktion $Y(s) = \mathcal{L}y(s)$.

(b) Udtryk løsningen $y(t)$ ved hjælp af funktionen $\sinh(3t)$ og foldningen $\cosh(2t) * \sinh(3t)$.

(c) Bestem $\cosh(2t) * \sinh(3t)$ og opskriv løsningen $y(t)$ ved hjælp af eksponentialfunktioner.

(feb. 2014) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at $r(t) = t(\pi^2 - t^2)$ for $-\pi < t \le \pi$.

(a) Forklar hvorfor der ingen cosinus-led optræder i Fourierrækken for $r(t)$, og bestem denne.

(b) Bestem en 2π-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + 3y(t) = r(t).$$

(feb. 2014) (a) Bestem vektorfeltet $\operatorname{rot} \vec{F}$, idet

$$\vec{F} = \frac{1}{1 + (x + 2yz^2)^2}(1, 2z^2, 4yz).$$

(b) Undersøg om $\vec{F}$ er et gradientfelt, og bestem i så fald et potential for $\vec{F}$.

(c) Lad C betegne den kvartcirkel der har centrum i origo og går fra $P = (1, 0, 0)$ til $Q = (0, 1, 0)$ i planen hvor $z = 0$. Beregn da kurveintegralet

$$\int_C \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

og sammenlign med værdien af $\int_L \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, idet L betegner det rette liniestykke fra P til Q.

(feb. 2014) (a) Omskriv rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{z + 3 + \mathrm{i}\,4}{3 + \mathrm{i}\,4}\Big)^n$$

til en potensrække, og bestem dernæst radius og centrum for konvergenscirklen.

(b) Diskuter hvilke af de følgende funktioner, der er analytiske for $z \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = z + |z|^2, \quad g(z) = e^{\sin z}, \quad h(z) = \frac{1}{(z - \mathrm{i}\,2)^3}.$$

(c) Afgør om forskriften

$$G(z) = \frac{z - 1}{z^2 + 3z - 4}$$

fastlægger en analytisk funktion for $z \neq -4$, og bestem kurveintegralet $\int_S G(z)\,dz$, idet S betegner den cirkel hvor $|z| = 2$.

(jan. 2013) Betragt begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) - 5y(t) = e^{-t} & \text{for } t > 0, \\ y(0) = -1, & \\ y'(0) = 4. & \end{cases}$$

(1) Anvend Laplacetransformationen $\mathcal{L}$ til at finde løsningen $y(t)$. Man kan benytte at

$$\frac{1}{s-1}\frac{1}{s+5}\frac{1}{s+1} = \mathcal{L}\Big(\frac{1}{6}\sinh t + \frac{1}{24}(e^{-5t} - e^{-t})\Big). \qquad (\dagger)$$

(2) Eftervis at der om foldningen $e^{at} * e^{bt}$, for $a \neq b$, gælder formlen

$$e^{at} * e^{bt} = \frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt}).$$

Bestem $\mathcal{L}(e^{at} * e^{bt})$.

(3) Udled formlen (†).

(jan. 2013) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = \begin{cases} \pi - t & \text{for } 0 \le t \le \pi, \\ -\pi - t & \text{for } -\pi \le t < 0. \end{cases}$$

(1) Vis at $r(t)$ er en ulige funktion.

(2) Opskriv Fourierrækken for $r(t)$.

(3) Bestem en 2π-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) - 3y'(t) + 28y(t) = r(t).$$

(jan. 2013) Lad S betegne fladen i $\mathbb{R}^3$ med parameterfremstillingen, hvor $0 \le \rho \le 1$ og $0 \le \phi \le 2\pi$,

$$\vec{r}(\rho, \phi) = (\rho \cos \phi, 2\rho \sin \phi, -1 - \rho^2(\cos^2 \phi + 4 \sin^2 \phi)),$$

Desuden betragtes vektorfeltet $\vec{F} = (2xy^3 \cos^2 z, 3x^2y^2 \cos^2 z, -x^2y^3 \sin(2z))$.

(1) Angiv ved en ligning sammenhængen mellem x, y og z for hvert punkt $(x, y, z) \in S$.

(2) Bestem $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, når C betegner randkurven af S med parameterfremstillingen $\vec{r}(1, \phi)$.

(3) Beregn fluxen $\int_s (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{n}\, dA$, idet $\vec{n} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$ betegner normalvektorfeltet på S.

(jan. 2013) Lad $f(z)$ betegne funktionen givet ved

$$f(z) = \frac{1}{7 + z^2}.$$

(1) Begrund at den uendelige række

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-\tfrac{1}{7})^n z^{2n}$$

er konvergent for alle komplekse tal $z \in \mathbb{C}$ for hvilke $|z| < \sqrt{7}$.

(2) Bestem potensrækken for $f(z)$ med $z_0 = 0$ som udviklingspunkt, og angiv dens konvergensradius.

(3) Lad $z_1 = \mathrm{i}\sqrt{7}$. Vis at $f(z)$ fremstilles (for $|z - z_1| < 2\sqrt{7}$) af Laurent-rækken

$$f(z) = \frac{-\mathrm{i}}{2\sqrt{7}} \frac{1}{z - z_1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{(2\sqrt{7})^{n+2}} (z - z_1)^n.$$

[*Vink:* Man kan bruge at $z^2 + 7 = (z - \mathrm{i}\sqrt{7})(z + \mathrm{i}\sqrt{7})$, hvor man kan omskrive $z + \mathrm{i}\sqrt{7} = z - z_1 + \mathrm{i}\,2\sqrt{7}$.]

Angiv hvilken type singularitet $f(z)$ har i punktet z_1.

(4) Udled ved brug af residueregning at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{7}}.$$

(feb. 2013) (1) Forklar hvorfor

$$\mathcal{L}(u(t-1)e^t) = \frac{e^{1-s}}{s-1},$$

idet $\mathcal{L}$ betegner Laplacetransformationen og $u(t)$ står for Heaviside funktionen.

(2) Anvend $\mathcal{L}$ til at finde løsningen $y_1(t)$, $y_2(t)$ til begyndelsesværdiproblemet

$$\begin{cases} y_1'(t) = 2y_1(t) - 4y_2(t) + u(t-1)e^t, & y_1(0) = 3, \\ y_2'(t) = y_1(t) - 3y_2(t) + u(t-1)e^t, & y_2(0) = 0. \end{cases}$$

(feb. 2013) Lad $r(t)$ betegne den 2π-periodiske funktion bestemt ved at

$$r(t) = t^2, \quad \text{for } -\pi \leq t \leq \pi.$$

(1) Opskriv Fourierrækken for $r(t)$.

(2) Bestem en 2π-periodisk partikulærløsning til differentialligningen

$$y''(t) - 12y'(t) + 5y(t) = r(t).$$

(feb. 2013) Foruden vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (3x^2y^2 \tan z, 2x^3y \tan z, x^3y^2(\cos z)^{-2})$ betragtes en kurve C med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(\phi) = (2, 2\cos\phi + 1, \frac{\pi}{3} + 2\sin\phi), \qquad 0 \leq \phi \leq \pi.$$

(1) Vis at C er en cirkelbue, og karakteriser denne.

(2) Udregn divergensen og rotationen af $\vec{F}$.

(3) Bestem kurveintegralet $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(feb. 2013) (1) Bestem konvergensradius R for potensrækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n.$$

Begrund at sumfunktionen $g(z)$ er analytisk i cirkelskiven $|z-1| < 1$.

(2) Udled at $G(z)$ er analytisk i halvplanen hvor $\mathrm{Re}\, z > 0$, idet

$$G(z) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \mathrm{i}\arctan(\frac{y}{x}), \qquad z = x + \mathrm{i}\, y,\ x, y \in \mathbb{R}.$$

(3) Vis at $G(z) = g(z)$ når $|z-1| < 1$. (*Vink:* Man kan bestemme en potensrække for G.)

(jan. 2012) Betragt begyndelsesværdiproblemet givet ved $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ og ligningen $y''(t) + 9y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t < 2, \\ t-2, & \text{for } t \geq 2. \end{cases}$$

1. (5 point) Omskriv begyndelsesværdiproblemet således at begyndelsesbetingelserne ligger ved $t = 0$.

2. (20 point) Anvend Laplacetransformationen til at finde $y(t)$.

(jan. 2012) Betragt differentialligningen $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er den 2π-periodiske funktion defineret ved:

$$r(t) = \begin{cases} \pi^2 - t^2, & \text{for } -\pi \leq t < 0, \\ \pi^2 + t^2, & \text{for } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

1.(5 point) Vis at r(t) kan skrives som en sum af en lige og en ulige funktion.

2.(10 point) Find Fourierrækken for $r(t)$.

3.(15 point) Find den periodiske partikulærløsning til ligningen.

(jan. 2012) Betragt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^6 - z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x^5z^3 + x)\mathbf{k}$ og fladen S med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = 2\rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{k},$$

hvorved $0 \leq \rho \leq 5$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

1.(5 point) Beregn $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$.

2.(10 point) Beregn $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n}\, dA$.

3.(10 point) Beregn $\int_{C_\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, når C_γ betegner kurven med parameterfremstillingen $\gamma(t) = 10\cos t\mathbf{i} + 5\sin t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(jan. 2012) 1. Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$ konvergerer for alle z i det komplekse plan $\mathbb{C}$.

Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$. Da potensrækken for konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$ er $f(z)$ analytisk i hele $\mathbb{C}$.

2. Lad $C_3(0)$ betegne cirklen med radius 3 og centrum i $z_0 = 0$ og orienteret mod uret. Beregn

$$\int_{C_3(0)} \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

(jan. 2011) Anvend Laplace transformationen til at løse ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2,$$

med begyndelsesbetingelsen $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$.

(jan. 2011) Betragt vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (0, -xz, y^2x)$. Lad σ være fladen med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(u, v) = (u + v, u^2, v^2), \qquad u^2 + v^2 \leq 1,$$

og lad C betegne kurven givet ved

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t + \sin t, \cos^2 t, \sin^2 t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(i) Beregn $\int_\sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, idet $\vec{n}$ betegner σ's normalvektor.

(ii) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$. Hvorfor får man samme resultat ?

(jan. 2011) Betragt ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t),$$

hvor den ydre kraft $r(t)$ er den 2π-periodiske funktion der er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & \text{for } -\pi < t < 0, \\ -t^2/\pi + \pi/2, & \text{for } 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Vis at $r(t)$ hverken er lige eller ulige.

Find en 2π-periodisk partikulærløsning til ligningen.

(jan. 2011) Betragt funktionen givet ved $f(z) = |2z + \bar{z}|^2$, hvor $z = x + \mathrm{i}\,y$ for reelle tal x, y.

1. Find to reelle funktioner u og v sådan at $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\,v(x, y)$ for alle z. Vis at $f(z)$ ikke er analytisk.

2. Lad γ betegne cirklen med radius 2, centrum i $z_0 = \mathrm{i}$ og orientering mod uret. Beregn det komplekse kurveintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Med venlig hilsen
Jon Johnsen