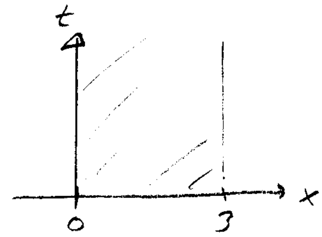
(8.6.5) $y_{tt} = 25\, y_{xx}$ for $0 < x < 3$, $0 < t$



$y(0,t) = 0$
$\quad = y(3,t)$

$y(x,0) = \frac{1}{4} \sin(\pi x)$

$y_t(x,0) = 10 \sin(2\pi x)$

Sinus-rækken (på intervallet $[0,3]$, hvor $L = 3$) for $f(x) = \frac{1}{4}\sin(\pi x)$,

$$f(x) = \sum_{n}^{\infty} A_n \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

har kun ét led, nemlig for $n = 3$ med $A_3 = \frac{1}{4}$.
Dette er klart da A_n-erne er entydigt bestemte.

Det tilsvarende problem med $y_t(x,0) \equiv 0$ løses derfor (da $a = 5$) af

$$v(x,t) = \frac{1}{4} \cos\left(3 \cdot \frac{\pi \cdot 5}{3} \cdot t\right) \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot x\right) = \frac{1}{4} \cos(5\pi t) \sin(\pi x).$$

~ o ~

Fartdataene $g(x) = 10 \sin(2\pi x)$ har sinus-rækken

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{3} \cdot x\right).$$

Også kun ét led, nemlig for $n = 6$ med $b_6 = 10$.
Om løsningsformlen (for Problem B, side 596)

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(n \cdot \frac{\pi a}{L} \cdot t\right) \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{L} \cdot x\right)$$

er det udledt at

$$B_n \frac{n \cdot \pi \cdot a}{L} = b_n \quad , \quad \text{dvs} \quad B_n = \frac{L}{n \cdot \pi \cdot a} b_n$$

Dette giver

$$w(x,t) = \frac{3}{6 \cdot \pi \cdot 5} \cdot 10 \sin\left(6 \cdot \frac{\pi 5}{3} t\right) \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot x\right)$$

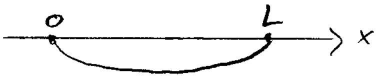
~ o ~

I alt fås løsningen til det fuldt inhomogene problem i opgaven,

$$y(x,t) = v(x,t) + w(x,t) \qquad (\text{jvf. s. } 590)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4} \cos(5\pi t) \sin(\pi x) + \frac{1}{\pi} \sin(10\pi t) \sin(2\pi x)}}.$$

8.6.19



$y(x,t) = y(x)$

Bølgeligning:

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} - g \quad (\text{jvf } (1) \text{ side } 589)$$

Stilstand: acceleration i punktet $x = 0$

$\rightsquigarrow$ $y_{tt}(x,t) = 0$ for alle x, alle t.

Derfor:

$$0 = a^2 y_{xx} - g$$

dvs

$$\boxed{a^2 y_{xx} = g}$$

Ved integration:
$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = \frac{\partial y}{\partial x}(0) + \int_0^x g\, d\tilde{x} = \frac{\partial y}{\partial x}(0) + gx$$

Og da $y(0)=0$:
$$y(x) = y(0) + \int_0^x \frac{\partial y}{\partial x}(\tilde{x})d\tilde{x} = \int_0^x \left(\frac{\partial y}{\partial x}(0) + g\tilde{x}\right)d\tilde{x}$$
$$= \frac{1}{2}gx^2 + x\frac{\partial y}{\partial x}(0)$$

Konstanten $\frac{\partial y}{\partial x}(0)$ fastlægges af at $y=0$ for $x=L$ (klart), så
$$0 = \frac{1}{2}gL^2 + L\frac{\partial y}{\partial x}(0), \text{ dvs } 0 = gL + 2\frac{\partial y}{\partial x}(0) \text{ eller } \frac{\partial y}{\partial x}(0) = -\frac{1}{2}gL.$$

Dermed løsning
$$\varphi(x) = y(x)$$
$$= \frac{1}{2}gx^2 + x\left(-\frac{1}{2}gL\right) = \underline{\frac{gx}{2}(x-L)}$$

Som ønsket

(den opgivne funktion $\varphi(x)$ kan også bare differentieres og indsættes i $a^2 y_{xx} = g$.)

(8.6.20)

$$v(x,t) = y(x,t) - \varphi(x)$$

måler hvormeget $y(x,t)$ afviger fra den stationære nedbøjning $\varphi(x)$. Pga. (40) og fordi $a^2\varphi_{xx} = g$

$$v_{tt} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}(y(x,t)-\varphi(x)) = y_{tt} - 0 = a^2 y_{xx} - g$$

$$a^2 v_{xx} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(y(x,t)-\varphi(x)) = a^2 y_{xx} - a^2\varphi_{xx} = a^2 y_{xx} - g$$

Dermed løser $y(x,t)-\varphi(x)$ problemet

$$v_{tt} = a^2 v_{xx}$$

$v(0,t) = 0 = v(L,t)$ (både y og φ er 0 for $x=0$ og $x=L$)

$v(x,0) = -\varphi(x)$ (da $y(x,0)-\varphi(x) = 0 - \varphi(x) = -\varphi(x)$ for $t=0$)

$v_t(x,0) = 0$ (da stengen slippes løs fra hvile)

Løsningsformulen giver nu

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\frac{\pi a}{L}t\right)\sin\left(n\frac{\pi}{L}x\right), \quad \text{når} \quad -\varphi(x) = \sum_1^{\infty} A_n \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{L}x\right)$$

Indsættes $t_0 = \frac{L}{a}\cdot 2k$, for et heltal $k = 0, 1, 2, \ldots$ bliver

$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi a}{L}\cdot t_0\right) = \cos(2nk\cdot\pi) = 1 \quad \text{for alle } n = 1, 2, \ldots$$

Så

$$y(x,t_0) = \varphi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot 1 \cdot \sin\left(n\cdot\frac{\pi}{L}x\right) = \varphi(x) + (-\varphi(x)) \equiv 0$$

– Dette sker altså med perioden $\frac{2L}{a}$.

o o o

Den anden yderstilling må derfor forventes at optræde med en tidslig forskydning på $\frac{L}{a}$.

Indsættes

$$t = \frac{L}{a}(2k+1), \quad \text{for et } k = 0, 1, 2, \ldots$$

fås

$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi a}{L}\cdot t\right) = \cos(n(2k+1)\cdot\pi)$$
$$= \cos(n\cdot\pi)$$

da cos er 2π-periodisk. Derved ses at

$$\cos\left(n\cdot\frac{\pi a}{L}\cdot t\right) = \cos(n\cdot\pi) = -1 \quad \text{for alle \underline{ulige} } n$$

8.6.20 fortsat

For de lige værdier af n i $\sum_{n=1}^{\infty}$ ses dog at $\cos(n\pi) = +1$.

Imidlertid er $A_n = 0$ for alle lige n i

$$-\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n \cdot \tfrac{\pi}{L} x).$$

Thi $-\varphi(x) = -\frac{gx}{2}(x-L)$ giver, for n lige.

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L \frac{g}{2}(xL - x^2)\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}x)\,dx$$

$$= \frac{g}{L}\int_0^{L/2} x(L-x)\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}x)\,dx + \frac{g}{L}\int_{L/2}^{L} x(L-x)\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}x)\,dx$$

Substitueres $x = L-u$ i det andet integral fås

$$A_n = \frac{g}{L}\int_0^{L/2} x(L-x)\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}x)\,dx + \frac{g}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{0}(L-u)u\,\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}(L-u))(-1)\,du$$

Men for n lige er $\sin(n\cdot\frac{\pi}{L}(L-u)) = \sin(n\pi - n\frac{\pi}{L}u) = \sin(-n\frac{\pi}{L}u) = -\sin(n\frac{\pi}{L}u)$

så

$$A_n = \frac{g}{L}\int_0^{L/2} x(L-x)\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}\cdot x)\,dx - \frac{g}{L}\int_0^{\frac{L}{2}}(L-u)u\,\sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}\cdot u)\,du$$

$$= 0$$

sinus ulige funktion

Med denne oplysning om φ's Fourier-række fås for $t = \frac{L}{a}(2k+1)$ at

$$y(x,t) = \varphi(x) + \sum_{n \text{ ulige}} A_n \cos(n\cdot\pi)\sin(n\tfrac{\pi}{L}\cdot x)$$

$$= \varphi(x) - \sum_{n \text{ ulige}} A_n \sin(n\cdot\tfrac{\pi}{L}\cdot x)$$

$$= \varphi(x) - (-\varphi(x))$$

$$= 2\varphi(x)$$

Som ønsket.

[Dette er en lidt bizar svingning mellem $y = 0$ og $y = 2\varphi$ som yderstillinger, med $y = \varphi$ i „midterstillingen"
– men dog oplysende udlægning.]