(8.6.13)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ u(r,0) = 0 \\ u(r,\pi) = 0 \\ u(a,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$

} dvs $u=0$ på 1. aksen

Som side 606 ses at

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad , \; 0<r<a, \; 0<\theta<\pi$$

løser $\Delta u = 0$ hvis og kun hvis der er et tal λ så

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0$$
$$\Theta'' + \lambda \Theta = 0$$

Igen er der 3 muligheder, afhængig af λ's værdi:

$$\Theta(\theta) = A\cos(\alpha\theta) + B\sin(\alpha\theta) \quad \text{for } \lambda = \alpha^2 > 0$$
$$\Theta(\theta) = A + B\theta \quad , \text{ for } \lambda = 0$$
$$\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta} \quad , \text{ for } \lambda = -\alpha^2 < 0$$

[Karakterligningen $z^2 + \lambda = 0$ kan løses af $\pm i\alpha$, 0 hhv. $\pm\alpha$.]

Randbetingelsen at $u=0$ på 1. aksen giver

$$\Theta(\theta) = 0 \quad \text{for } \theta = 0 \text{ og } \theta = \pi.$$

For $\lambda<0$ giver dette $A=0=B$ (den ubrugelige nulløsning...), for $\lambda=0$ giver $\theta=0$ at $A=0$, så $\theta=\pi$ giver $B=0$ (igen ubrugeligt) Mens $\lambda=\alpha^2>0$ giver

$$0 = \Theta(0) = A\cdot 1 \quad , \text{ så } A=0$$
$$0 = \Theta(\pi) = B\sin(\alpha\pi).$$

Dette lader sig kun gøre når $\alpha\pi = p\cdot\pi$ for et heltal p ($p\in\mathbb{Z}$). Så vi ender med

$$\Theta(\theta) = \sin(n\cdot\theta) \quad , \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Som i bogen fører dette til (da $a_n=0$ for hvert n)

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin(n\theta).$$

Da $\quad u(a,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^n \sin(n\theta) = f(\theta)$

er en sinus-række for $f(\theta)$ for $\theta\in[0,\pi]$, ses at.

$$c_n = \frac{1}{a^n}\cdot\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta.$$