Eksempel 6.7.1 om saltkoncentrationer

Jon Johnsen

10. september 2014

I eksempel 6.7.1 i [K] kan reglen for Laplacetransformering af den førsteordens afledede (dvs. (1) i afsnit 6.2) benyttes på begge ligninger. Derved fås **billedligningerne**

$$(s+0,08)Y_1(s)+0,02Y_2(s)=\frac{6}{s} \tag{1}$$

$$-0,08Y_1(s)+(s+0,08)Y_2(s)=0. \tag{2}$$

For hver fastholdt værdi af s løses disse to ligninger med hensyn til de ubekendte $Y_1(s)$ og $Y_2(s)$. Dette gøres her nemmest med determinantmetoden (kendt som Cramer's regel, se Theorem 7.7.4 i [K]),

$$Y_1=\frac{\frac{6}{s}(s+0,08)+150\cdot 0,02}{(s+0,08)^2-0,0016}=\frac{6+\frac{0,48}{s}+3}{s^2+0,16s+0,0048}=\frac{1}{s}\cdot\frac{9s+0,48}{(s+0,04)(s+0,12)}, \tag{3}$$

hvor nævnerens faktorisering fremkom ved at bestemme rødderne $s=-0,04$ og $s=-0,12$ i andengradspolynomiet $s^2+0,16s+0,0048$.

For Y_2 finder man på samme måde den knapt så pæne formel

$$Y_2=\frac{150(s+0,08)+6\cdot 0,08}{(s+0,04)(s+0,12)}=\frac{150s^2+12s+0,48}{s(s+0,04)(s+0,12)}. \tag{4}$$

For Y_1 er det enkelt at eliminere variablen s i tælleren:

$$\begin{aligned}Y_1&=\frac{9(s+0,04)}{s(s+0,04)(s+0,12)}+\frac{0,12}{s(s+0,04)(s+0,12)}\\&=\frac{9}{s(s+0,12)}+\frac{0,12}{0,08}\frac{1}{s}\Big(\frac{1}{s+0,04}-\frac{1}{s+0,12}\Big).\end{aligned} \tag{5}$$

Nu er $\frac{9}{s+0,12}=\mathcal{L}(9e^{-0,12t})$, og da effekten af at have *faktoren* $1/s$ er den samme som at tage stamfunktion, jvf. **Theorem 6.2.3**, så bliver resultatet at

$$\begin{aligned}y_1(t)&=9\int_0^t e^{-0,12\tau}\,d\tau+\frac{12}{8}\int_0^t(e^{-0,04\tau}-e^{-0,12\tau})\,d\tau\\&=9\frac{e^{-0,12t}-1}{-0,12}+\frac{3}{2}\Big(\frac{e^{-0,04t}-1}{-0,04}-\frac{e^{-0,12t}-1}{-0,12}\Big)\\&=\frac{300}{4}(1-e^{-0,12t})+\frac{300}{8}(1-e^{-0,04t})+\frac{100}{8}(e^{-0,12t}-1)\\&=\frac{800}{8}-\frac{300}{8}e^{-0,04t}-\frac{500}{8}e^{-0,12t}.\end{aligned} \tag{6}$$

Benyttes i stedet decimaltal har vi hermed opnået formlen for $y_1(t)$ fra [K]:

$$y_1(t)=100-37,5e^{-0,04t}-62,5e^{-0,12t}. \tag{7}$$

For $Y_2(s)$ optræder der andenpotensen s^2 i tælleren. Denne lader sig ikke så let eliminere, så i stedet for vælger vi at foretage en dekomposition i stambrøker. Nævneren har nemlig lutter *forskellige* rødder, og tælleren har *lavere grad* ($2\le 3$)—så derfor kan vi opnå konstanter A, B og C sådan at

$$Y_2(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+0,04}+\frac{C}{s+0,12}. \tag{8}$$

Med **grænseværdimetoden** fås så at

$$A = \lim_{s\to 0} sY_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{150s^2 + 12s + 0,48}{(s+0,04)(s+0,12)} = \frac{0,48}{0,04\cdot 0,12} = \frac{48}{0,48} = 100 \tag{9}$$

$$B = \lim_{s\to -0,04}(s+0,04)Y_2(s) = \frac{150\cdot 0,04}{-(0,12-0,04)} = -150\cdot\frac{1}{2} = -75 \tag{10}$$

$$C = \lim_{s\to -0,12}(s+0,12)Y_2(s) = \frac{150\cdot 0,12 - 8}{0,08} = \frac{150\cdot 12 - 800}{8} = \frac{450}{2} - 100 = 125. \tag{11}$$

Substitueres disse værdier ovenfor fås

$$Y_2(s) = \frac{100}{s} - \frac{75}{s+0,04} + \frac{125}{s+0,12}. \tag{12}$$

Da den inverse Laplacetransformation er lineær, så giver dette straks formlen i [K]:

$$y_2(t) = 100 - 75e^{-0,04t} + 125e^{-0,12t} = 100 - 75e^{-0,04t}(1 - \frac{5}{3}e^{-0,08t}). \tag{13}$$

NB. Den sidste parentes bliver *positiv* for tilpas store værdier af t, fordi $e^{-0,08t}$ aftager monotont mod nul for $t\to\infty$, og dermed ender $y_2(t)$ med at blive monotont voksende. Dette stemmer med grafen tegnet i Figur 144 i [K].

Man kan i øvrigt notere sig, at de negative vækstrater $-0,04$ og $-0,12$ ikke umiddelbart fremgår af det oprindelige system af koblede differentialligninger, jvf. (1)+(2). Men de fremkommer automatisk ved løsning af de algebraiske ligninger i (1) og (2), så Laplacetransformering er et **stærkt** hjælpemiddel i denne problemstilling.