NOTAT OM EKSPONENTIALMATRICER

3. november 2008

JON JOHNSEN

Lad A være en vilkårlig $n \times n$-matrix, dvs. $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$. Hensigten er da at udlede den kvalitative information om eksponentialmatricen e^{tA}, at den ij'te indgang altid besår af passende eksponential*polynomier*.

Dette er baseret på et kendskab til A's egenværdier. Betegnes de indbyrdes forskellige egenværdier med λ_1, $\lambda_2,\dots,\lambda_m$, så kan det karakteristiske polynomium for A skrives

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\nu_1}(\lambda - \lambda_2)^{\nu_2} \dots (\lambda - \lambda_m)^{\nu_m}. \tag{1}$$

Her gælder iflg. algebraens fundamentalsætning at

$$\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m = n. \tag{2}$$

Sætning 1. *Hvis $A \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{C})$ har egenværdier som ovenfor, så gælder om indgangene $e_{ij}(t)$ i $e^{tA} = (e_{ij}(t))_{i=1,\dots,n;\,j=1,\dots,n}$ at der findes konstanter $c_{ijkl} \in \mathbb{C}$ så*

$$e_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{m}(c_{ijk0} + c_{ijk1}t + \dots + c_{ijkv_k-1}t^{v_k-1})e^{\lambda_k t}. \tag{3}$$

Bevis. Idet e^{tA} er en fundamentalmatrix for $x' = Ax$, så løses problemet

$$x'(t) = Ax(t) \tag{4}$$

$$x(0) = e_j, \tag{5}$$

af $x(t) = e^{tA}e_j$, dvs. af j'te søjle af e^{tA}. (Her er $e_j = (0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ den j'te naturlige basisvektor for $\mathbb{C}^n$.)

Det er derfor nok at vise det næste resultat. □

Sætning 2. *En vektorfunktion $x(t) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$ løser det homogene førsteordens system $x'(t) = Ax(t)$ hvis og kun hvis der for hvert j findes konstanter $c_{jkl} \in \mathbb{C}$ så*

$$x_j(t) = \sum_{k=0}^{m}(c_{jk0} + c_{jk1}t + \dots + c_{jkv_k-1}t^{v_k-1})e^{\lambda_k t} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\nu_k-1} c_{jkl}t^l e^{\lambda_k t}, \tag{6}$$

hvorved A har egenværdierne $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ af multiplicitet $\nu_1,\dots,\nu_m$ som ovenfor.

Beviset for denne sætning kan føres ved at bruge, at en vilkårlig kvadratisk matrix er similær med en øvre trekantsmatrix U. Dvs. at der for en passende inverterbar matrix P haves

$$A = PUP^{-1}. \tag{7}$$

Denne faktorisering af A følger af, at det i Axlers bog blev vist, jævnfør Theorem 5.13 der, at den lineære operator $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ givet ved $Tx = Ax$ i en passende valgt basis $B = (v_1, \dots, v_n)$ for $\mathbb{C}^n$ er givet ved en øvre trekantsmatrix U; dvs.

$$\mathcal{M}(T; B) = U = (u_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,n} \quad \text{hvor } u_{ij} = 0 \text{ for } i > j. \tag{8}$$

Man kan nemlig sætte $P = \left(\begin{smallmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{smallmatrix}\right)$, for denne matrix er inverterbar, da søjlerne er lineært uafhængige. Ligningen $A = PUP^{-1}$ er endvidere ækvivalent med $AP = PU$, som er opfyldt da

$$\begin{aligned} AP &= \begin{pmatrix} Av_1 & \dots & Av_j & \dots & Av_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u_{11}v_1 & \dots & \sum_{i \le j} u_{ij}v_i & \dots & \sum_{i=1}^n u_{in}v_i \end{pmatrix} = P(u_{ij}) = PU. \end{aligned} \tag{9}$$

For matricen tA har vi derfor oplagt at

$$tA = P(tU)P^{-1}. \tag{10}$$

Pga. matrixmultiplikationens kontinuitet, følger det heraf at $e^{tA} = e^{P(tU)P^{-1}} = Pe^{tU}P^{-1}$.

Bevis. Indføres vektorfunktionen $y(t) = P^{-1}x(t)$, så ses det let at denne løser $y' = Uy$ netop hvis $x' = Ax$:

$$\begin{aligned} x'(t) = Ax(t) &\iff x'(t) = PUP^{-1}x(t) \iff P^{-1}\tfrac{dx}{dt} = UP^{-1}x(t) \\ &\iff \tfrac{d}{dt}(P^{-1}x(t)) = Uy(t) \iff y'(t) = Uy(t) \\ &\iff \begin{cases} y_1' = u_{11}y_1 + u_{12}y_2 + \dots + u_{1n}y_n \\ y_2' = \qquad\quad u_{12}y_2 + \dots + u_{1n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = \qquad\qquad\qquad\qquad u_{nn}y_n. \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

Bemærk i øvrigt, at diagonalelementerne i U er egenværdier for A, idet similære matricer har samme karakteristiske polynomium. Vi kan derfor skrive $\lambda_k = u_{kk}$ (med en anderledes indeksering af egenværdierne). Det rækker derfor at vise, at $y(t)$ er løsning til $y' = Uy$ hvis og kun hvis hver indgang $y_j(t)$ for visse polynomier $p_{jk}(t)$ af grad $< \nu_k$ kan skrives

$$y_j(t) = \sum_{k=j}^{n} p_{jk}(t)e^{\lambda_k t}. \tag{12}$$

(Herved er ν_k nu det antal gange tallet λ_k optræder i diagonalen af U.) Thi af formlen $x = Py$ opnår man så den ønskede form af $x(t)$. Og omvendt, til en hver løsning $x(t)$ giver $y = P^{-1}x$ en løsning $y(t)$ som har ovenstående form blot med en sum over $k \in \{1, \dots, n\}$; men det følger af nedenstående, at leddene med $k < j$ alle er nul.

Formlen for $y_j(t)$ vises ved induktion efter n. For $n = 1$ er det klart at $y_n(t) = ce^{u_{nn}t} = ce^{\lambda_1 t}$, $c \in \mathbb{C}$, er løsningsmængden, hvilket viser påstanden.

Mere generelt antages sagen bevist for alle øvre trekantsmatricer af orden $n - 1$. Induktionsantagelsen giver derfor (når ligningen for y_1' ignoreres i (11)), at formlen for $y_j(t)$ er gyldig for $j \in \{2, \dots, n\}$. Indføres dette i den inhomogene ligning for y_1 fås

$$y_1'(t) = \lambda_1 y_1(t) + u_{12} y_2(t) + \dots + u_{ln} y_n(t) = \lambda_1 y_1(t) + \sum_{k=2}^{n} p_k(t) e^{\lambda_k t}, \tag{13}$$

for passende polynomier p_k, idet led af samme type fra $y_2, \dots, y_n$ kan slås sammen. Dette ændrer ikke graderne, så

$$\operatorname{grad} p_k < \tilde{\nu}_k, \tag{14}$$

hvor $\tilde{\nu}_k$ betegner antallet af gange λ_k optræder i diagonalen af den øvre trekantsmatrix $\tilde{U}$, der fremkommer ved at slette 1. række og 1. søjle i U.

Løsningsformlen (jvf. kapitel 0) giver

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\lambda_1 t}(c_1 + \int e^{-\lambda_1 t} \sum_{k=2}^{n} p_k(t) e^{\lambda_k t}\, dt) \\ &= c_1 e^{\lambda_1 t} + \sum_{k=2}^{n} e^{\lambda_k t} q_k(t), \end{aligned} \tag{15}$$

for visse polynomier $q_k(t)$ af grad $< \nu_k$. Dette verificeres i to skridt:

(I) Dersom $\lambda_k - \lambda_1 \neq 0$ for alle $k \geq 2$, da kan man for hvert led i summen i (15) bestemme $q_k(t)$ sådan at den afledte af $q_k e^{(\lambda_k - \lambda_1)t}$ er lig $p_k e^{(\lambda_k - \lambda_1)t}$, for dette kræver iflg. produktreglen at

$$q_k'(t) + (\lambda_k - \lambda_1) q_k(t) = p_k(t). \tag{16}$$

Og dersom man skriver $p_k(t) = b_l t^l + \dots + b_1 t + b_0$, så løses denne ligning af polynomiet $q_k(t) = a_l t^l + \dots + a_1 t + a_0$ blot

$$\begin{aligned} (\lambda_k - \lambda_1) a_l &= b_l \\ l a_l + (\lambda_k - \lambda_1) a_{l-1} &= b_{l-1} \\ &\dots \\ 2a_2 + (\lambda_k - \lambda_1) a_1 &= b_1 \\ a_1 + (\lambda_k - \lambda_1) a_0 &= b_0. \end{aligned} \tag{17}$$

Men disse ligninger kan løses successivt oppefra og nedefter, så $q_k(t)$ kan bestemmes som ønsket. Bemærk, at graden af q_k her i (I) er lig graden af p_k for alle $k \geq 2$. Og da λ_1 kun optræder $\nu_1 = 1$ gang i diagonalen, mens $q_1 = c_1$ opfylder $\operatorname{grad} q_1 \leq 0 < 1 = \nu_1$, så er den ønskede form af $y_1(t)$ opnået.

(II) Hvis $\lambda_1 = \lambda_{k_0}$ for et (eller flere) $k_0 \geq 2$, så vælges q_{k_0} blot som stamfunktion til p_{k_0}. Så er

$$\operatorname{grad} q_{k_0} = 1 + \operatorname{grad} p_{k_0} < 1 + \tilde{\nu}_{k_0} = \nu_{k_0}. \tag{18}$$

Derfor er $\operatorname{grad} q_k < \nu_k$ for alle $k \in \{1, \dots, n\}$, idet leddene med $k \neq k_0$ behandles som under (I).

Dermed er (12) eftervist, og sætningen følger heraf som set ovenfor. □