NOTAT OM LIAPUNOVFUNKTIONER

JON JOHNSEN

Dette notat tilstræber en mere detaljeret forklaring af de centrale sætninger 5.2 og 5.3 i [AB] end de skitser, der er givet side 268–270.

1. Stabile ligevægtpunkter

Først skal det vises, at Lyapunovfunktioner giver anledning til stabile ligevægtpunkter:

Sætning 5.2. *Hvis man til $x'(t) = f(x(t))$ kan bestemme en Lyapunovfunktion E defineret i en omegn af ligevægtspunktet $\hat{x} = 0$, så er origo et* stabilt *ligevægtspunkt.*

Beviset vil udgå fra nogle observationer af almen interesse.

Bemærkning 1. Da definitionen af stabilitet kun stiller betingelser for begyndelsepunkter $x(0)$, der ligger tilstrækkeligt tæt på $\hat{x} = 0$, så kan man indskrænke f til at have samme definitionsmængde som E. Dvs. man kan antage at $\mathrm{Dm}(E) = \Omega = \mathrm{Dm}(f)$.

Bemærkning 2. Til hvert $\varepsilon > 0$ der optræder i definitionen af stabilitet kan man gerne antage at ε er så lille at

$$B(0, 2\varepsilon) \subset \Omega. \tag{1}$$

For et $r > 0$ haves jo $B(0, r) \subset \Omega$, fordi 0 er et indre punkt i Ω, så man kan erstatte ε med $\min(\varepsilon, \frac{r}{2})$. Derved opnås for de lukkede kugler at $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset \Omega$. I det følgende antages stiltiende at dette er gjort.

Bemærkning 3. Til hvert $\varepsilon > 0$ kan man indføre

$$c = \inf\{\, E(x) \mid \|x\| = \varepsilon \,\}, \tag{2}$$

og der gælder altid at $c > 0$ fordi ε-sfæren er kompakt. Det er jo klart at $c \geq 0$ fordi $E(x) \geq 0$ for alle $x \in \Omega$, og antages at $c = 0$ opnås en modstrid: Så findes nemlig $x_k \in \Omega$ som opfylder $E(x_k) \to 0$ for $k \to \infty$ mens $\|x_k\| = \varepsilon$ for alle k. Pga. kompaktheden kan der udtyndes til en konvergent delfølge $x_{k_l} \to y$ for $l \to \infty$, og da normen er kontinuert fås $\|y\| = \lim_{l\to\infty} \|x_{k_l}\| = \varepsilon > 0$, som pga. egenskaberne ved E giver modstriden

$$0 < E(y) = \lim_{l\to\infty} E(x_{k_l}) = c = 0. \tag{3}$$

Derfor er $c > 0$ som påstået.

Bemærkning 4. Hvis man til $\varepsilon > 0$ indfører $c > 0$ som i Bemærkning 3 kan man betragte mængden

$$\Omega^c = \{\, x \in \Omega \mid E(x) < c,\ \|x\| < \varepsilon \,\}. \tag{4}$$

Denne er åben fordi den er en fællesmængde af åbne mængder, nemlig $\Omega^c = B(0, \varepsilon) \cap E^{-1}(\,]-\infty, c[\,)$.

Desuden har Ω^c den vigtige egenskab, at banerne for $x'(t) = f(x(t))$ ikke kan forlade Ω^c:

$$x(0) \in \Omega^c \implies x(t) \in \Omega^c \quad \text{for alle} \quad t \geq 0. \tag{5}$$

Thi for det første aftager E langs banerne, så

$$E(x(t)) \leq E(x(0)) < c \quad \text{for alle} \quad t \geq 0. \tag{6}$$

For det andet er $\|x(t)\| < \varepsilon$ for alle $t \geq 0$: Dersom $\|x(t_0)\| \geq \varepsilon$ for et $t_0 > 0$, så giver kontinuiteten af den sammensatte funktion $t \mapsto x(t) \mapsto \|x(t)\|$ at alle værdier mellem $\|x(0)\|$ og $\|x(t_0)\|$ antages på intervallet $[0, t_0]$ (jvf. en hovedsætning om kontinuerte reelle funktioner). Specielt haves $\|x(t_1)\| = \varepsilon$ for et $t_1 \in [0, t_0]$, og derfor medfører definitionen af c at $E(x(t_1)) \geq c$; hvilket strider mod formlen ovenfor. Alt i alt viser dette at $x(t) \in \Omega^c$ for alle $t \geq 0$.

Med disse forberedelser kan vi give et

Bevis for sætning 5.2. Til et givet $\varepsilon > 0$ (som altså kan antages tilstrækkeligt lille, jvf. Bemærkning 1) bestemmes $c > 0$ som ovenfor. Dernæst vælges $\delta > 0$ sådan at $B(0, \delta) \subset \Omega^c$, idet Ω^c er åben. For en bane til $x'(t) = f(x(t))$ gælder der så i følge Bemærkning 4 at

$$\|x(0)\| < \delta \implies x(0) \in \Omega^c \implies x(t) \in \Omega^c \quad \text{for alle} \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Pér definition betyder dette at 0 er et stabilt ligevægtpunkt, som ønsket.

Ved at raffinere teknikkerne ovenfor kan man vise følgende skærpelse:

Sætning 5.3. *Hvis $x'(t) = f(x(t))$ har en* streng *Lyapunovfunktion E i en omegn af ligevægtspunktet $\hat{x} = 0$, da er dette et asymptotisk stabilt ligevægtspunkt.*

Bevis. Pga. sætning 5.2 er $\hat{x} = 0$ et stabilt ligevægtspunkt; det skal vises at dette er asymptotisk stabilt. Lad $\varepsilon > 0$ være givet.

1° Det kan igen antages at ε er så lille at $\overline{B(0, \varepsilon)} \subset B(0, 2\varepsilon) \subset \Omega$. Det er da nok at vise, at dersom vi fikserer et vilkårligt $x(0) \in \Omega^c$, så findes et $T > 0$ så

$$x(t) \in B(0, \varepsilon) \quad \text{for alle} \quad t \geq T. \tag{8}$$

(Jvf. definitionen af grænseværdier for $t \to \infty$.)

2° Funktionen $t \mapsto E(x(t))$ er aftagende og nedadtil begrænset med

$$E_0 := \{\, E(x(t)) \mid t \geq 0 \,\} = 0. \tag{9}$$

A priori er $E_0 \geq 0$, fordi E er positiv, og en antagelse om at $E_0 > 0$ fører til en modstrid: Thi i så fald findes der pga. kontinuiteten af E i 0 et $r > 0$ så $\|y\| < r$ medfører $-E_0 < E(y) < E_0$; her kan $0 < r < \varepsilon$ gerne antages. Idet $\Omega^c \subset \overline{B(0, \varepsilon)} \subset \Omega$ giver en hovedsætning om kontinuerte funktioner at

$$\begin{aligned} -k := &\sup\{\, \dot{E}_f(y) \mid y \in \overline{\Omega^c} \setminus B(0, r) \,\} \\ = &\max\{\, \dot{E}_f(y) \mid y \in \overline{\Omega^c}, y \notin B(0, r) \,\} \leq 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Faktisk er $-k < 0$, idet $\dot{E}_f$ kun har det ene nulpunkt $y = 0$ (hvor maksimet jo ikke kan falde!). Pga. definitionerne af r og E_0 gælder der at $\|x(t)\| \geq r$, så langs banen der udgår fra det faste $x(0) \in \Omega^c$ har man at $\dot{E}_f(x(s)) \leq -k$. Dette giver for $t \to \infty$ at

$$\begin{aligned} 0 \leq E(x(t)) &= E(x(0)) + \int_0^t \tfrac{d}{ds} E(x(s))\, ds \\ &= E(x(0)) + \int_0^t \dot{E}_f(x(s))\, ds \\ &\leq E(x(0)) + \int_0^t (-k)\, ds = E(x(0)) - kt \searrow -\infty, \end{aligned} \tag{11}$$

og denne modstrid viser at $E_0 = 0$.

3° Der gælder at $E(x(t)) \to 0$ for $t \to \infty$. Dette er en konsekvens af 2°. (Overvej! Brug at $E_0 = 0$ og at funktionen er aftagende.)

4° Endelig gælder $x(t) \to 0$ for $t \to \infty$, som konsekvens af 3°. Thi ellers findes et $\varepsilon_0 > 0$ så udsagnet $x(t) \in B(0, \varepsilon_0)$ er falsk for vilkårligt store værdier af t. Mere præcist findes til ε_0 en følge $t_N \nearrow \infty$ så

$$\|x(t_N)\| \geq \varepsilon_0 \quad \text{for alle} \quad N \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Man kan gerne antage at $\varepsilon_0 < \varepsilon$ og så har man som i Bemærkning 3 at

$$c_0 = \inf\{\, E(y) \mid \|y\| = \varepsilon_0 \,\} > 0. \tag{13}$$

Pga. 3° kan man vælge $T > 0$ så $E(x(t)) < c_0$ for alle $t \geq T$.

Det følger at (12) kan skærpes til at

$$\|x(t)\| \geq \varepsilon_0 \quad \text{for } \textit{ethvert} \quad t \geq T. \tag{14}$$

Thi dersom $\|x(t_0)\| < \varepsilon_0$ for et $t_0 \geq T$ så vælges $t_{N_0} > t_0 \geq T$ så $\|x(t_{N_0})\| \geq \varepsilon_0$. Idet $t \mapsto \|x(t)\|$ er kontinuert viser dette at værdien ε_0 antages di et vist punkt $\tilde{t}_0$ af intervallet $]t_0, t_{N_0}]$, dvs. $\|x(\tilde{t}_0)\| = \varepsilon_0$. Så er $E(x(\tilde{t}_0)) \geq c_0$, og da $\tilde{t}_0 > T$ strider dette mod at $E(x(t)) < c_0$ for *alle* $t \geq T$.

Ved gentagelse af argumentet for at $E_0 = 0$ fås nu en modstrid: Igen er

$$-k_0 := \max\{\, \dot{E}_f(y) \mid y \in \overline{\Omega^c} \setminus B(0, \varepsilon_0) \,\} < 0, \tag{15}$$

og da banen pga. (14) løber i den mængde maximet beregnes over, så haves

$$\begin{aligned} 0 \leq E(x(t)) &= E(x(T)) + \int_T^t \dot{E}_f(x(s))\, ds \\ &\leq E(x(T)) + \int_T^t (-k_0)\, ds = E(x(T)) - k_0(t - T) \searrow -\infty. \end{aligned} \tag{16}$$

Denne modstrid viser at $x(t) \to \infty$ for $t \to \infty$.

5° I kraft af 4° er $\hat{x} = 0$ et asymptotisk stabilt ligevægtspunkt.

Opgave: Brug sætning 1.3 i [AB] til at godtgøre, at den maksimale løsning i gennem punktet $(0, x_0)$, $x_0 \in \Omega^c$, faktisk er defineret på hele intervallet $[0, \infty[$, således det har god mening at tale om $\lim_{t\to\infty} x(t)$. *Hvor* bør man konkludere dette i beviset for sæting 5.3 ?