Matematik 2A, foråret 2005
Det teknisk-naturvidenskabelige basisår
Prøveopgave nr. A

Emnet for opgaven er differensligninger af formen

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, \qquad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}. \tag{1}$$

Her kan vektoren $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^2$ opfattes som den k'te tilstandsvektor for et system (f.eks. det i bogen beskrevne med migration mellem forstæder og centrum i en storby, eller $\mathbf{x}_k$ kan være lagerbeholdningen i en virksomhed etc.), med $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ som en given begyndelsesvektor.

I princippet ønsker man at bestemme alle fremtidige tilstande $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \dots$. Som en konkret matrix betragtes $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \end{pmatrix}$.

(I) Hvis $\mathbf{x}_0 = (1, 3)$ find da $\mathbf{x}_1$ og gør rede for at $\mathbf{x}_k = A^k\mathbf{x}_0$ for ethvert $k = 1, 2, \dots$.

(II) Eftervis at $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = 1/2$ er egenværdier for A, og bestem egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ i $\mathbb{R}^2$ hørende til henholdsvis λ_1 og λ_2.

Godtgør at $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ er en basis for $\mathbb{R}^2$.

(III) Gør rede for at egenværdierne for en $n \times n$-matrix M præcis udgøres af de reelle rødder i dens karakteristiske polynomium, $\det(M - \lambda I)$, og at egenrummet hørende til λ er nulrummet for $M - \lambda I$.

(IV) Forklar hvorfor der til en vilkårlig begyndelsesvektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ findes tal c_1, c_2 i $\mathbb{R}$ så

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2. \tag{2}$$

Vis at $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\frac{1}{2}\mathbf{v}_2$.

Find et tilsvarende udtryk for $\mathbf{x}_k$ (*vink:* brug formlen fra (I)) og forklar at $\mathbf{x}_k \to c_1\mathbf{v}_1$ for $k \to \infty$.

(V) Findes der et *ligevægtspunkt* for (1), det vil sige et $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ så at $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$ for alle k ?