

---

**Oversigt nr. 1**

---

**Projektforslag.**

Som emne for mat1-projektet i dynamiske systemer kan I vælge at analysere nedenstående differentiallyigning; den er kendt som *van der Pols* ligning og kommer fra studiet af elektronrør i fysik i 1920'erne:

$$x''(t) + (x(t)^2 - 1)x'(t) + x(t) = 0. \quad (1)$$

Denne ligning foreslås dels fordi den, paradoksalt nok, har den kedelige egenskab (som de fleste andre ikke-lineære differentiallyigninger) at løsningerne ikke kan opskrives eksplicit — og dels fordi man ved at anskue den som *dynamisk system* kan få en langt dybere indsigt i løsningernes opførsel (som er ganske interessant!).

Konkret kan man i projektet arbejde med emner à la:

- Visualiser ved hjælp af Maple løsningernes opførsel ved at skitsere både retningsfeltet i faseplanen og et par løsninger hørende til udvalgte begyndelsesdata.
- Bevis at der eksisterer løsninger til (1), og afgør hvorvidt de er entydigt bestemte.
- Afgør hvor de maksimale løsninger er definerede.
- Undersøg om systemet har ligevægtspunkter eller en grænsecyklus.

Kort sagt: Analyser (1) ved hjælp af de begreber der introduceres i PE-kurserne.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 2**

---

I PE-kurset om ordinære differentiaalligninger skal vi besæftige os med bogens kapitler 0, 1, 2 og 5. Kurset er så centralt at I med fordel kan begynde at læse disse kapitler fra en ende af (uanset hvor langt forelæsningerne er nået).

A propos: Forelæsningerne giver absolut størst **udbytte**, når man på forhånd har gjort sig bekendt med emnerne inden man kommer. Kun derved er det muligt at være særligt opmærksom, eller stille spørgsmål, i forbindelse med de ting man ikke umiddelbart kan læse sig til !

**1. gang, mandag den 1. oktober 2001.** Vi beskæftiger os her med kapitel 0 og en smule med kapitel 5.1 (til og med bogens Eksempel 4).

Dette stof har det hovedformål at introducere den sprogbrug og de begreber vi skal benytte os af i kurset (og projektet!), og af den grund lægger det op til selvstudium. Jeg vil derfor koncentrere forelæsningen om de ting, man har sværere ved at læse sig til direkte. Afsnittet om lineære differentiaalligninger præsenterer nogle ting I til dels kender, men sigtet er at gøre det i større generalitet og på en mere overordnet måde.

Programmet er så:

- **8.15-10.00:** Forelæsning over kapitel 0 og 5.1.
- **10.15-12.00:** Øvelser bestående af opgaverne 0.1+2+8+14 og 5.1+2.

Vi skal også aftale hvorledes vi fremover fordeler tiden mellem forelæsninger og øvelser.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 3**

---

**2. gang onsdag den 3. oktober 2001.** Vi gør kapitel 0 færdigt vedrørende de lineære ligninger og fortsætter derefter med kapitel 1. Vi får nu brug for en del matematisk analyse, der først gennemgås senere i analyse 1; det vil jeg naturligvis forklare grundigt, og til jul vil det være klart for jer at der er tale om meget centrale emner fra efterårets kurser. For nuværende kan I så tage det som en forsmag på hvad der kommer (og det er måske rart nok med en sådan introduktion).

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 0 og oplæg til opgaverne.
- **8.30–10.00:** Øvelser i grupper.
  - (1) Diskuter hvor omhyggelig bogens gennemgang af eksempel 0.1 er.
  - (2) I eksempel 0.3 indføres  $\hat{x}$  som det maksimale udsving (s. 6). Er det overhovedet velbegrunderet? Er det matematisk korrekt? Giver eksempel 5.2 et bedre overblik over sagen?
  - (3) Verificer påstanden s. 20 om at (2) og (18) er ensbetydende.
  - (4) Opgave 0.16.
  - (5) Gamle opgaver.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 1.1 (til ca. side 40).

**3. gang, onsdag den 10. oktober 2001.** NB ! Husk at mandag den 8. ikke byder på differentialligninger (holdes senere).

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 1.1.
- **8.30–10.00:** Øvelser med opgaverne 1.1+3+5 og 0.9.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 1.1–2.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 4**

---

Som Lisbeth Grubbe Nielsen skrev, er jeg nødt til at aflyse seancerne i uge 45 grundet andet undervisning. Vi må så tage beslutning om hvornår de skal afholdes.

**4. gang, mandag den 22. oktober.**

- **8.15–8.30:** Repetition om sætning 1 og 2 samt beviserne.
- **8.30–10.00:** Øvelser:
  - (1) Diskuter beviset for sætning 1, og sørg for at I forstår både helheden og detaljerne.
  - (2) Regn opgaverne  $1.2+4+8+10$ .
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 1.1–2, begyndende med *maksimale* løsninger.

**5. gang, onsdag den 24. oktober.**

- **8.15–8.30:** Repetition om kapitel 1.
- **8.30–10.00:** Øvelser:
  - (1) Diskuter om de tre betingelser i bogens bemærkning nederst side 42 er nødvendige og/eller tilstrækkelige for at en given løsning er maksimal.
  - (2) Regn opgaverne  $1.11+12+13+17$ .
- **10.15–12.00:** Forelæsning tager hul på kapitel 2.

Bemærk at vi i kapitel 2 studerer de lineære systemer i mange detaljer. Dette er ikke bare for øvelsens skyld, men fordi det lineære tilfælde er det der tillader flest generelle resultater, og derfor er det man kan sammenligne opførslen af et konkret (ikke-lineært) dynamisk system med. (Og jo, det er en konkret opfordring til jeres projekter !)

Den lineære teori behandles bekvemmest med brug af eksponentialfunktionen af en matrix (sic !). Dette er en begrebsmæssig udfordring for jer, som vi tager hul på straks i begyndelsen af kapitel 2.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 5**

---

Generelt sagt får alle grupperne for lidt ud af øvelserne: Hjælp derfor jer selv og hinanden ved at have set på opgaverne **inden** I møder til undervisningen !

**6. gang, mandag 29. oktober.**

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 1.
- **8.30–10.00:** Øvelser:
  - (1) Diskuter beviset for sætning 1.4 (side 47), og sørg for at I forstår det.
  - (2) Bevis påstanden aller nederst side 48.
  - (3) Regn opgaverne 1.13+17+19.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 2.1-2.2. Forbered jer grundigt, således vi kan få afmystificeret hvad  $e^{tA}$  er !

**7. gang, onsdag 31. oktober.**

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 2.1 ff.
- **8.30–10.00:** Øvelser:
  - (1) Regn opgaverne 1.16 og 2.1+5.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 2.3-2.4.

Vi skal her gennemanalysere 1.-ordens systemer med konstante koefficienter, idet vi bruger eksponentialfunktionen af matricer.

Husk i øvrigt, at vi udskyder seancerne i uge 45.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 6**

---

**Advarsel !** Bogen bruger “egenværdi” for en matrix  $A$  både i ordets egentlige forstand (dvs. at  $(A - \lambda I)v = 0$  har ikke-trivielle løsninger) **og** i den betydning at  $\lambda$  er rod i  $A$ 's karakteristiske polynomium. Dette bør I være opmærksom på, da de to ting ikke er det samme ! F. eks. har  $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  for  $0 < \theta < \pi$  ingen egenværdier (da den roterer med vinklen  $\theta$ ), men dog ifølge Algebraens Fundamentalsætning to (komplekst konjugerede) rødder i det karakteristiske polynomium; disse er faktisk  $e^{\pm i\theta}$ .

Denne påstand om bogens sprogbrug kan man få godtgjort på side 117 linie 7 fra neden, idet det karakteristiske polynomium for en generel matrix faktoriseres ved hjælp af egenværdierne. Som eksemplet ovenfor viser, er dette kun muligt hvis “egenværdi” i denne sammenhæng er synonymt med “karakteristisk rod”.

Det fremgår normalt af sammenhængen i hvilken forstand bogen bruger ordet, så forhåbentlig kan I undgå misforståelser.

**8. gang, onsdag 14. november..**

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 2.4, især side 120.
- **8.30–10.00:** Øvelser: Regn opgaverne 2.9+25+26.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 2.2–3 og 5.1–2. Der er et par ting der går igen i begge disse kapitler, og de skal derfor blot nævnes en gang.

I næste uge har vi de sidste to seancer i PE-kurset, jævnfør skemaet på net-siderne. Hensigten er at gennemgå kapitel 5 til og med side 294. Det er begrebsmæssigt ikke så vanskeligt som kapitel 2, hvor vi måtte udnytte en masse lineær algebra for at gennemføre en lang analyse, men det er til gengæld i kapitel 5 man kan lære at betragte differentialligninger som *dynamiske systemer*.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

Oversigt nr. 7

---

**9. gang, mandag den 19. november.**

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 5.1+2.
- **8.30–10.00:** Øvelser:
  - (1) Regn opgaverne 5.3+7.
  - (2) Diskuter om man i Definition 5.2 af et asymptotisk stabilt ligevægtspunkt kan udelade forudsætningen at  $\hat{x}$  er et stabilt ligevægtspunkt. Ville det ændre noget hvis man fjernede den ?
  - (3) Opgave 5.9.

- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 5.3–4.

Som et af kursets sidste hovedpunkter skal vi indføre en såkaldt Lyapunov-funktion. I bogen betegnes den med  $E$ , sikkert fordi man i de mange eksempler fra mekanisk fysik kan tage den mekaniske energi som en brugbar Lyapunov-funktion. Det kan man dog ikke alment, men I må gerne tænke på den på den måde. Groft sagt er et ligevægtspunkt stabilt, hvis det er et minimumspunkt for  $E$ , som vi skal se.

**10. gang, onsdag den 21. november.**

- **8.15–8.30:** Repetition fra kapitel 5.3+4.
- **8.30–10.00:** Øvelser: Regn opgaverne 5.12+13+15.
- **10.15–12.00:** Forelæsning over kapitel 5, frem til side 294. Vi skal gennemgå den pointe at man for visse klasser af systemer kan bevise at der eksisterer en grænsecyklus.

Hvis tiden tillader det, vil jeg runde af med en lille oversigt over kurset.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen

---

**Oversigt nr. 8**

---

Denne ugeseddel angår **analyse 1**, idet undertegnede vikarierer for Horia i kursets gennemgang af integrationsteorien.

Forløbet bliver ret kort, med bare tre seancer, så jeg foreslår vi hver gang begynder med forelæsning og tager øvelser bagefter.

Bemærk at vi læser efter noter, der ligger på min hjemmeside:

<http://www.math.auc.dk/jjohnsen/>

Seneste opdatering er sket dd. klokken 16.12 !

**Onsdag den 28. november.** Her forelæses over noternes afsnit 1–3 i tidsrummet 8.15–10.00.

Dernæst øvelser frem til klokken 12. Opgaverne er 2.1 og 3.1 i notesættet. Desuden bruges noternes sætninger til følgende:

- (1) Vis at  $F(x) := \int_1^x \frac{1}{t} dt$  er en veldefineret funktion fra  $]0, \infty[$  til  $\mathbb{R}$ .
- (2) Bevis at  $F$  er vilkårligt ofte differentiabel.
- (3) Godtgør at  $F$  er strengt voksende og at  $F$  har en invers funktion. (Kan vi slutte at inversen er differentiabel ?)
- (4) Vis at  $F$  har et interval  $I$  som billedmængde. Vis at  $I = \mathbb{R}$ .
- (5) Diskuter at der for alle  $x, y \in ]0, \infty[$  gælder funktionalligningen  $F(xy) = F(x) + F(y)$ .
- (6) Har I tidligere mødt denne funktion ?

**Mandag den 3. december.** Forelæsning over noternes afsnit 4 og lidt af 5 fra 8.15–10.00. Dernæst opgaverne til kapitel 4.

**Onsdag den 5. december.** Fra 8.15 gennemgås resten af noterne til og med kapitel 6 (bemærk at dette gør rede for nogle forhold for vektorfunktioner, der hidtil har været brugt uden bevis i kurset om differentiaalligninger). Dernæst regner vi de sidste opgaver.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen



---

**Oversigt nr. 9**

---

**Pensumliste**

**Lineær algebra.** Efter “Linear algebra done right” af Sheldon Axler, 2. udgave (Springer 1999) er der læst

**Chapter 1** Vector Spaces pp 1–19.

**Chapter 2** Finite dimensional vector space pp 21–35.

**Chapter 3** Linear Maps pp 38–53.

**Chapter 5** Eigenvalues and eigenvectors, pp 76–81.

**Chapter 6** Inner-product spaces pp 98–106, 117–122.

**Chapter 7** Operators on Inner Product Spaces pp 127–138, 147–152.

**Differentialligninger.** Her har vi benyttet “Ordinära differentialekvationer” af K. G. Andersson og L.-C. Böiers (Studentlitteratur 1992).

**Kapitel 0** Terminologi och inledande exempel, pp 1–12 og 15–30.

**Kapitel 1** Allmänna satsar om existens och entydighet, pp 31–53.

**Kapitel 2** Lineära system med konstanta koefficienter, pp 87–121.

**Kapitel 5** Autonoma system, pp 251–285.

I begge bøger er de nævnte afsnit gennemgået og er dermed pensum.

Med venlig hilsen  
Jon Johnsen