Oversigt nr. 1

I kurset matematik 1A skal vi beskæftige os med matematisk analyse, og der kommer groft sagt til at være tre emner:

- Funktioner af flere variable (hvordan differentierer og integrerer man den slags !?),
- komplekse tal,
- differentialligninger.

Men som I vil få at se begynder vi mere jordnært med noget velkendt: cosinus og sinus. Vi vil både repetere det og give et nyt perspektiv på sagen ved også at diskutere deres omvendte funktioner. Mere om det senere.

Vi vil benytte følgende bøger:

[EP] C. Edwards og D. Penney: *Calculus, 6th edition*, Prentice–Hall, New Jersey, 2002.

[EJ] H. Elbrønd Jensen: *Matematisk analyse 1*, 4. udgave, Institut for matematik, Danmarks tekniske universitet, 2000.

[RVC] Bo Rosbjerg og Henrik Vie Christensen: “Kompendium i calculus” og “Kompendium i komplekse tal og differentialligninger”.

Disse skulle meget gerne være at købe i bogladen (Strandvejen 12–14, 1. sal).

1. gang, torsdag den 2. september. Som nævnt vil vi begynde med de trigonometriske funktioner og deres inverser, svarende til appendiks C og pp. 467–471 i [EP]. Da det er første gang vil programmet være:

kl. 8.15-9.35 Her vil jeg give en introduktion til kurset, og forelæse over ovennævnte emner.

kl. 9.45-12.00 Her regner vi opgaver. Alle regner 1, 3, 5, 7, 9, 11, 20, 27, 28, 29, 33, 37, 43, 47 i appendiks C af [EP]. Dem der har tid til overs går videre med 17, 19, 21, 25, 39 samme steds.

En semesteroversigt kommer snarest.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

2. gang, tirsdag den 7. september.

- **12.30–13.00:** Her repeteres afsnit 7.5 i [EP], idet hovedvægten nu vil ligge på $\arctan$.
- **13.00–14.45:** Her øves teorien ved at følgende opgaver laves af

  alle: 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 12, 17, 21 i kapitel 7.5 i [EP].

  Diskuter dernæst konceptopgaverne side 474 nederst i [EP]. NB! NB!! Dette gøres i *fællesskab* i grupperne, så I sikrer jer at I alle har forstået såvel problematikken som de svar, I når frem til.

  Dette kan yderligere suppleres med sandt/falsk-opgaver fra cd-rom'en (kræver dog et drev, men mon ikke mange af jer kunne have glæde af det hjemme !?).

  de hurtige: Kan supplere med opgave 56 og 64 i kapitel 7.5.

- **14.55–16.15:** Her gennemgås afsnit 11.4 i [EP] om *Taylor polynomier*.

  Emnet er at tilnærme funktioner med polynomier, således at man i en omegn af et fast punkt (*udviklingspunktet*) kun kommer til at begå en 'lille' fejl. Dels er det vigtigt hvordan disse polynomier kan bestemmes, dels skal vi se at man kan på forhånd kan få information om fejlens størrelse. (NB! Alle elektroniske regnemaskiner er baserede på dette tema, så det sådan set ganske fundamentalt for moderne anvendelser af matematik..)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Sidste gang gennemgik vi lidt alment om *afbildninger*, herunder følgende **sætning 1.** *For en afbildning $f\colon D \to E$, mellem to vilkårlige mængder D og E, er følgende egenskaber ensbetydende:*

(i) *Der findes en afbildning $g\colon E \to D$ som opfylder*

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \quad \text{for ethvert } x \in D \\ f(g(y)) &= y \quad \text{for ethvert } y \in E. \end{aligned}$$

(ii) *f er både* injektiv *og* surjektiv.

I bekræftende fald siges f at være inverterbar, og g kaldes inversen *(el. den omvendte afbildning) til f.*

Som optakt til den generelle diskussion af Taylorpolynomier gennemgik vi også, hvordan differentiabilitet i x kan ses som en tilnærmelse (nær x) med polnomier af grad 1. Dette er indholdet af
sætning 2. *For en funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, hvor I er et åbent interval af $\mathbb{R}$, er følgende egenskaber ækvivalente:*

(i) *f er differentiabel i $x \in I$,*

(ii) *i $x \in I$ har funktionstilvæksten en fremstilling af formen*

$$f(x+h) - f(x) = ah + \varepsilon(h)h,$$

for et tal $a \in \mathbb{R}$ og en passende ε-funktion (dvs. $\varepsilon(0) = \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$).

I bekræftende fald er $f'(x) = a$.

Formlen i (ii) er blandt andet nyttig, fordi vi senere ifm. funktioner af flere variable vil få lettere ved at sammenligne med det velkendte for én variabel.

3. gang, torsdag den 9. september.

kl. 8.15–8.40 Repetition af begreber som injektiv, surjektiv og inverterbare afbildninger. Og af Taylorpolynomier.

kl. 8.40–10.40 Som opgaver tager vi:

(1) Diskuter i gruppen hvorvidt $f(x) = x^4 - x^2$ er en injektiv/surjektiv/bijektiv afbildning $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Overvej hvilken indskrænkning af funktionen, der ville give en injektiv afbildning. Hvilken ændring giver en surjektion?

(2) **Formuleringsøvelse:** Ved tavlen præsenteres den almene definition af injektiv henholdsvis surjektiv, med konsekvenser for $f(x) = x^4 - x^2$. (Gøres på skift af alle gruppemedelmmer, der overhører hinanden.)

(3) Diskuter i fællesskab beviset for (ii) $\Longrightarrow$ (i) i sætning 2 ovenfor.

(4) Opskriv formlen i sætning 2, (ii) for funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, idet $x = 1$ bruges som udviklingspunkt. ($\varepsilon(h)$ ønskes ikke angivet eksplicit.)

Brug dette til at bestemme en tilnærmelse til tallet $\frac{1}{0{,}97}$.

(5) Regn opgaverne 1–10 i afsnit 11.4 af [EP]. (Nøjes med selve Taylor-polynomierne — restleddene tager vi næste gang.)

10.40–12.00 Her gennemgås resten af kapitel 11.4 i [EP]. NB! I starten af dette afsnit står der noget om uendelige summer, f.eks. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. I bedes gå let hen over dette, og begynde i linie 9 fra neden side 702.

Som en anden kilde til emnet Taylors formel kan nævnes et lille notesæt på dansk af Arne Jensen. Det findes på følgende URL:

`www.math.aau.dk/~matarne/04-csb/taylor/noter.pdf`

Herfra gennemgås en relativt enkel udledning af Taylors formel, som er baseret på delvis (partiel) integration.

Endelig gennemgås eksempler på anvendelser.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

I følgende semesteroversigt er henvisningerne til de relevante afsnit af [EP].

Uge	Dato	Seance	Emner
36	2/9	1	Trigonometriske funktioner og deres inverser (App. C+7.5)
37	7/9	2	Inverse afbildninger. Taylorpolynomier (11.4)
	9/9	3	Taylors formel (11.4)
38	14/9	4	Kurvelængde. Krumning (12.5–12.6 til s. 821)
	16/9	5	Funktioner af flere variable, partielle afledte (13.1–2, 13.4)
39	21/9	6	Ekstrema for funktioner af flere variable (13.5)
	23/9	7	Differentialer og lineær approksimation (13.6)
40	28/9	-	
	30/9	-	
41	5/10	-	
	7/10	-	
42	12/10	-	efterårsferie
	14/10	8	Kædereglen. Implicit differentiation (13.7)
43	19/10	9	Retningsafledte. Gradientvektoren (13.8)
	21/10	10	Opsamling og opgaver
44	26/10	11	Introduktion til integration i flere variable (14.1)
	28/10	12	Integration over områder i planen (14.2)
45	2/11	13	Areal og volumen bestemt ved dobbeltintegraler(14.3)
	4/11	14	Polære koordinater (10.2)
46	9/11	15	Dobbeltintegraler i polære koordinater (14.4) Anvendelse af dobbeltintegraler (14.5).
	11/11	16	Integration: Eksempler og opsamling
47	16/11	-	
	18/11	-	
48	23/11	17	Komplekse tal
	25/11	18	Rødder i (komplekse) polynomier
49	30/11	19	Den komplekse eksponentialfunktion
	2/12	20	Indledende om differentialligninger
50	7/12	21	Lineære andenordens differentialligninger
	9/12	22	Lineære diff.-ligninger og superposition
51	14/12	23	Inhomogene andenordens differentiallgninger
	16/12	24	Diff. lign.: Opsamling og opgaver
	21/12	25	Afslutning af kurset. Introduktion om MR1

Justeringer kan forekomme.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

4. gang, tirsdag den 14. september.

- **12.30–13.00:** Repetition om Taylors formler, og lidt om bestemmelsen af restleddene.

- **13.00–14.55:** Se igen på opgaverne 1–10 i afsnit 11.4 af [EP], denne gang med angivelsen af Lagranges restled.

  Fortsæt med 11.4.11,13, og bemærk hvor stor en forskel det giver at udviklingspunktet nu er ændret.

  Find en tilnærmelse til $\sqrt{1,0028}$ vha. Taylors formel for $n = 3$ (brug opg. 11.4.5). Husk at kontrollere restleddets størrelse.

  Prøv at finde $\sqrt[5]{10032}$ på tilsvarende måde ($n = 2$).

  Som *introduktion til videnskabelige beregninger* kan I se på følgende anvendelse af Taylor-teorien:

  - udled først formel (28) side 712, ved at lave opgave 11.4.52 (additionsformlen for tangens i denne opgave har vi vist i en opgave 1. gang)
  - Bestem så "din egen" tilnærmelse til værdien af π ved at gøre som i opgave 11.4.54.

    Bemærk her, at det at lægge tilpas mange led sammen i formel (27) side 712 blot svarer til at finde en funktionsværdi af $P_n(x)$ (for $\arctan$) for et tilpas stort n. I den forstand bestemmes π via Taylors formel.

  Læs den historiske note side 712 nederst, og bliv imponeret!

- **14.55–16.15:** Gennemgang af kapitel 12.5 og side 817–821 kurver i rummet. Vi fokuserer på kurvers længde og krumning (det sidste kun for kurver i planen).

  Et par højdepunkter

  - Vektorfunktioner som parameterfremstillinger (man kan forestille sig en vektor, hvis spids med tiden vandrer hen over hele kurven);
  - differentiation og integration af vektorfunktioner;
  - længdeberegning ved integration af farten.
  - naturlig parameterfremstilling;
  - krumning af plane kurver.

5. gang, torsdag den 16. september.

- **8.15–8.40:** Repetition om kurver i rummet.
- **8.40–10.40:** Opgaverne 3,7,15,17,23,31 i kapitel 12.5 af [EP]. Desuden om kurvelængde: 1 og 3, og om krumning 11, 13, 14 side 828.

  Til de hurtige en 'tænkeopgave': Nr. 39 i 12.5. Vink: Parameterfremstillingen skal opfylde ligningen $r(t) \cdot r(t) = R^2$, hvor R betegner kuglens radius (hvorfor?). Differentier denne ligning med hensyn til t (Thm. 2.(4), p. 806).
- **10.40–12.00:** Gennemgang af 13.1–2 og 13.4 i [EP]. Vi skal her se på
  - grafen for en funktion af to variable;
  - niveaukurver og -flader;
  - (lokale) maksima og minima, saddelpunkter (uddybes senere).
  - Partiel differentiation.

  Mens man i gymnasiet lærer metoder til at analysere sammenhængen mellem *to* variable størrelser, så skal vi finde metoder til at studere sammenhænge mellem *tre eller flere* størrelser. Det vil være nyt for jer, men mange fænomener i fysik, ingeniørvidenskab, kemi og økonomi mm. har netop denne karakter, så det vil være afgørende for jer at klø på for at lære disse ting.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Sidste gang blev der gennemgået de grundlæggende ting om *differentialer* af funktioner af en variabel, jævnfør side 5 i [RVC].

Desuden nåede vi hovedtrækkene af 13.1+2+4 i [EP], dog ikke om tangentplaner — dette emne gemmes nogle uger.

6. gang, tirsdag den 21. september.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering.
- **12.50–14.45:** Opgaverne er mange, men ej krævende:

  kurver: lav opgaverne fra sidst om kurvelængde, dvs. nr. 1,3, og om krumning, 11, 13, 14 side 828. Desuden: Find krumningen af grafen for $\sin x$ både for $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$, jævnfør side 20 nederst i [RVC]. (Har forskellen indflydelse på hvor let/svær grafen er at tegne 'pænt' ?)

  definitionsmængder: Kapitel 13.2 nr. 14 og 15.

  grafer: Nr. 25 og 28 samme steds.

  niveaukurver: Nr. 31, 39 (og 43 for de hurtige).

  mere om grafer: Nr. 47 og 55. Diskuter i gruppen !

  differentiation: Nr. 13.4.5 og 41, samt som anvendelse 13.4.55.

- **14.55–16.15:** Gennemgang af kapitel 13.5 om *ekstremumsundersøgelser* for funktioner af flere variable.

7. gang, torsdag den 23. september. Denne seance vil yderligere fokusere på den centrale differentialregning. Det er nu en ekstra indsats vil lønne sig !!

- **8.15–8.35:** Repetition om bestemmelse af maksimum og minimum.
- **8.35–10.30:** Her regner I opgaver i

  Partielle afledte: Nr. 13.4.15 og 43. Diskuter 13.4.45–50 i fællesskab!

  Ekstema: 13.5.9, 25, 37, 39 og 47 (*girth* betyder omkreds, vinkelret på længderetningen).

  Ugens nød: 13.5.51, om at producere en stålbøje billigst muligt. Hvem finder en kort vej til (at forstå) svaret?

- **10.40–12.00:** Forelæsning over kapitel 13.6 i [EP] om *differentialer* og *lineær tilnærmelse*. Dette vil have kraftige analogier med det, der er gennemgået for funktioner af en variabel. Repeter derfor gerne sætning 2 fra oversigt nr. 3 og side 20 i [RVC] om differentialer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Sidste gang vi fik defineret at $f(x_1, \dots, x_n)$ kaldes *differentiabel* i et indre punkt x af definitionsmængden, dersom der findes en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ som tillader en fremstilling

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \vec{a} \cdot \vec{h} + \varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|, \tag{1}$$

hvor $\varepsilon(\vec{h})$ er en epsilonfunktion af n variable, dvs. $0 = \varepsilon(0) = \lim_{|\vec{h}| \to 0} \varepsilon(\vec{h})$, hvor længden af $\vec{h} = (h_1, \dots, h_n)$ er $|\vec{h}| = \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}$.

Vi fandt at i så fald kan $\vec{a}$ bestemmes ved differentiation, idet $\vec{a} = \nabla f(\vec{x}) = (f_1'(\vec{x}), \dots, f_n'(\vec{x}))$; mere præcist medfører differentiabiliteten at disse partielle afledte eksisterer. I bedes repetere dette ved at læse eksempel 6 i kapitel 13.6.

Repeter også *differentialet* df_x af $f(x_1, \dots, x_n)$ side 893, og overvej at f er differentiabel præcis når funktionstilvæksten $\Delta f(\vec{x}) = f(\vec{x} + \vec{h}) - f(\vec{x})$ kan tilnærmes godt med $df_x(h)$ for 'små' værdier af $\vec{h}$. Tænk over at det er dette man har brug for i bogens eksempel 5.

Vi definerede også at en funktion, der er differentiabel i $\vec{x}_0$, *har* et tangentplan, som består af de punkter $(x_1, \dots, x_n, z)$ i $\mathbb{R}^{n+1}$ som opfylder

$$z = f(\vec{x}_0) + f_1'(\vec{x}_0)(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + f_n'(\vec{x}_0)(x_n - x_{0,n}). \tag{2}$$

(NB ! Noter forskelle og ligheder ved sammenligning med (1)!)

8. gang, torsdag den 16. oktober.

- **8.15–8.35:** Vi repeterer lidt om differentiabilitet og differentialer.

- **8.35–10.30:** Ved opgaveregningen belyses:

  differentialer: Opg. 9,19 og 25 i kapitel 13.6.

  måleusikkerhed: Opg. 37 i kapitel 13.6. Bemærk at arealet er en funktion af tre variable, a, b og θ.

  Begreber: Konceptopgave nr. 3 side 895 og 48 samt 47, i nævnte rækkefølge. Diskuter sagerne i gruppen !

  Endelig regnes resten af ekstremumsopgaverne fra 8. gang, hvis I har tid til overs.

- **10.40–12.00:** Her gennemgår vi 13.7 (dog udelades matrixformen side 902) om partiel differentiation af sammensatte funktioner. Dette er kendt som *kædereglen*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Sidste gang fik vi gennemgået kædereglen for differentiation af sammensatte funktioner, med $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ og $\vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$,

$$\tfrac{\partial f(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x_j} = \tfrac{\partial f}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x}))\tfrac{\partial g_1}{\partial x_j}(\vec{x}) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial y_n}(\vec{g}(\vec{x}))\tfrac{\partial g_n}{\partial x_j}(\vec{x}).$$

Bemærk, at denne formel *forudsætter* at f og $g_1,\dots,g_n$ alle er *differentiable*, jævnfør gennemgangen i torsdags. (Formuleringen i [EP] forudsætter at alle disse funktioner har kontinuerte partielle afledte af første orden, men det er at kræve lidt for meget, da dette som nævnt tidligere medfører at f og $g_1,\dots,g_n$ er differentiable.)

Vi fik også givet en oversigt over alle rgnereglerne for partiel differentiation og for differentiabilitet samt differentialer.

9. gang, tirsdag den 19. oktober.

- **12.30–12.50:** Vi runder kædereglen af med forklaring af dens anvendelse på *implicit differentiation*.
- **12.50–14.45:** Opgaver i

  kædereglen: Nr. 1, 5 og 15, samt 21, i kapitel 13.7.

  implicit differentiation: Nr. 31.

  Eksempler: Opgave 37 og 38.
- **14.55–16.15:** Her gennemgås kapitel 13.8 om *retningsafledte* og gradientvektoren $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, som sammenfatter de partielle afledte af f i ét objekt. Men vil man studere f's ændringer i *andre* retninger end langs koordinatakserne, så har man brug for såkaldte retningsafledte. For differentiable funktioner er der en fin formel, som udtrykker disse via ∇f. Formlen har to gode geometriske konsekvenser:
  - ∇f peger i den retning hvor f vokser hurtigst,
  - ∇f er *normalvektor* til niveaufladerne for f.

10. gang, torsdag den 21. oktober. Begyndes **8.15–8.35** med repetition. Dernæst:

- **8.35–11.00:** Som opgaver tager vi i kapitel 13.8 nr. 7, 15, 23, og 33. Regn også nr. 53 for at styrke den geometriske forståelse.

  Den ekstra tid til opgaverne skyldes, at I bør regne flere opgaver i ekstremumsundersøgelser. Alle regner derfor 13.5.48+59+60. Endelig gamle ekstremumsopgaver fra 7. gang.
- **11.15–12.00:** Jeg vil her afrunde det gennemgåede om differentialregning for funktioner af flere variable og give et par eksempler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

11. gang, tirsdag den 26. oktober.

- **12.30–13.00:** Afrunding af ekstremumsundersøgelserne.
- **13.00–14.45:** Tiden er her sat af til at I kan beskæftige jer med prøveopgaverne 2, 3 og 4 under vejledning fra hjælpelærerne og undertegnede.
- **14.55–16.15:** Vi går her igang med kapitel 14.1 om integration af funktioner af (foreløbig) to variable — såkaldte *planintegraler*. Ligesom ved differentialregningen er der stadig mange lighedspunkter med tilfældet med en variabel, men igen bliver det vigtigste nok at forstå forskellene — hvad vil det for eksempel overhovedet sige at integrere en funktion af flere variable ?

  Som vi skal få at se kan man ved 'flerdimensionel' integration typisk udregne arealer og volumener, og vi skal gå en del i dybden med dette tema.

12. gang, torsdag den 28. oktober.

- **8.15–8.45:** Vi vil her se på eksempler med integration af funktioner på rektangler.
- **8.45–10.40:** Planintegraler belyses gennem opgaverne i

  Riemannsummer: 14.1.5.

  Dobbeltintegraler: 14.1.13+23.

  Ombytning: 14.1.31+32.

  Uligheder: 14.1.37.

  Er der tid til overs kan man se på de gamle opgaver eller prøveopgave 2–4.
- **10.40–12.00:** Her gennemgår vi afsnit 14.2 som også handler om planintegraler; men nu er integrationsområdet mere generelt end rektangler. Integration over rektangler er ikke tilstrækkeligt til rumfangsbestemmelse for simple legemer som kugler o. lign. Rumfang- og integrationsbegrebet skal derfor udvides til mængder, der ligger mellem grafer af funktioner defineret over mere generalle områder end rektangler. Selve integrationsopgaven (finde stamfunktioner to gange i træk) forbliver lige nem; det er ofte mere vanskeligt at finde og beskrive det plane definitionsområde som et simpelt område (med variable grænser) eller som foreningsmængde af sådanne.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

13. gang, tirsdag den 2. november.

- **12.30-13.00:** Repetition og perspektivering.
- **13.00–14.45:** Først *diskutereres* punkt 1+2 af konceptopgaven side 952. Dernæst vil vi regne opgaverne 14.2.3, 7, 15, 28, 31 og 33.

  Evt. kan I se mere på prøveopgaverne, hvis der er tid til overs.
- **14.55–16.15:** Her gennemgår kapitel 14.3, hvor vi skal se nærmere på volumener.

14. gang, torsdag den 4. november.

- **8.15–8.45:** Repetition om dobbeltintegraler og volumen.
- **8.45–10.30:** Først går vi igang med 14.2.41–44. Hensigten er at man skal vente med at bestemme stamfunktioner til integralet er reduceret mest muligt — der er flere muligheder, så diskuter i *fællesskab*.

  Dernæst opgaverne 14.3.5, 19, 27 og 29.
- **10.40–12.00:** Vi tager her en afstikker til kapitel 10.2 for at blive fortrolige med *polære koordinater*. Disse vil senere blive til stor hjælp også ved udregning af planintegraler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

15. gang, tirsdag den 9. november.

- **12.30–13.00:** Repetition om polære koordinater.
- **13.00–14.45:** Udi de polære koordinater kan I dygtiggøre jer ved at se på
  - **omregninger:** via opg. 10.2.1+2+3+5+7;
  - **polære ligninger:** opg. 10.2.11+13+15+19+21+25+29.

  NB ! Opgaverne er mange men ej svære. Rutine i at benytte disse formler og begreber vil være særdeles nyttigt om et par uger, hvor de kommer til at indgå på afgørende måde i forståelsen af *komplekse tal*.
- **14.55–16.15:** Emnet er her planintegraler i *polære koordinater*, dvs. kapitel 14.4. Mere præcist kan man lave en substitution og opskrive integralet i polære koordinater (der er både forskelle fra og ligheder med det I kender om substitution ifm. funktioner af en variabel). Som vi skal få at se kan dette være en umådelig stor fordel, hvis integrationsområdet involverer cirkelbuer, især hvis også integrandens niveaukurver er cirkler. Vi når også lidt af 14.5 om anvendelser.

16. gang, torsdag den 11. november.

- **8.15–8.45:** Først lidt repetition og perspektivering fra [kap.14.4, EP].
- **8.45–10.30:** Som træning i at regne planintegraler ud vha. polære koordinater kan I se på opgaverne 14.4.3+5+9+13 og 17.

  Isvafler er næste emne !! (Rrroolig nu, vi tager det helt matematisk. . . , så) I skal regne 14.4.29.
- **10.40–12.00:** Vi gør kapitel 14.5 i [EP] færdigt, og runder den videregående integralregning af med at se på rumintegraler (kap. 14.6 i [EP]), og på hvordan disse kan udregnes i *sfæriske koordinater* (disse er en pendent til længde- og breddegrader på jordens overflade).

NB !. Fra den 23/11 skal vi benytte en ny bog (her betegnet [EJ]), nemlig: “Helge Elbrønd Jensen et al., *Matematisk Analyse I*, DTU” med tilhørende opgavesamling.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Igår tirsdag den 22/11 blev opgaveregningen helliget prøveopgaverne 1, 5 og 6.

Dernæst begyndte vi gennemgangen af *komplekse tal* fra kapitel 4 i [E]. Som motivation blev det i oversigtsform nævnt at *tal* i almindelighed ikke bare er noget der automatisk findes (selv om man nemt kunne få indtryk), men at de faktisk kan ses som objekter vi selv indfører med henblik på at løse forskelligartede opgaver. Som et eksempel blev det bevist at $\sqrt{2}$ ikke er rationalt (mere præcist at $r^2 \neq 2$ for ethvert $r \in \mathbb{Q}$), så vi har brug for en mængde $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$ for at løse $x^2 = 2$.

Vi nåede det meste af afsnit 4.2. Læs selv indledningen og de historiske bemærkninger, samt det om polære koordinater i planen (måske er denne fremstilling på dansk lettere at forstå ?).

Her er en række stikord fra gennemgangen, til brug for **selvoverhøring:** *Komplekse tals addition og multiplikation, identifikation af de reelle tal, den imaginære enhed, real- og imaginærdel, regneregler for komplekse tal, modulus og argument, kompleks konjugerede tal*.

18. gang, torsdag den 25. november.

- **8.15–8.35:** Repetition om komplekse tal, og lidt nyt om *division* i $\mathbb{C}$ — her er der en vigtig teknik bestående i forlængelse med nævnerens konjugerede.

- **8.35–10.30:** Som opgaver tager vi i [EJ] først nr. 401, 403, 405.

  Diskuter dernæst nr. 414 i fællesskab i gruppen.

  Rund af med yderligere træning i *modulus og argument* ved at lave 406, 407, 411, 412 og 413.

- **10.40–12.00:** Her gennemgår vi afsnit 4.3 i [EJ], og vi skal opnå et nyt syn på rødder i polynomier. F.eks. skal vi se at $x^2 + 1 = 0$ har to komplekse rødder, og mere generelt har ethvert polynomium af grad n præcis n rødder — selvom disse kan være komplekse er dette alligevel en særdeles bekvem information (som vi skal se senere ved differentialligningerne).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Ved gennemlæsningen af kapitel 4.3 i [EJ] om komplekse polynomier, bør I fokusere på det *nye*: antallet af rødder er *lig* med polynomiets grad, polynomiers division kan laves nu ved regning med komplekse tal, andengradsligninger har nu altid to rødder, men istedet for kvadratroden af diskriminanten indgår en løsning til den *binome* ligning $w^2 = D$; endelig løses $z^n = a$ nu let ved regning med modulus og argument. Osv.

Bemærk at vi sidste gang indførte den *komplekse eksponentialfunktion*

$$e^{\mathrm{i}\,x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \tag{3}$$

Hermed er $|e^{\mathrm{i}\,x}| = 1$ for alle $x \in \mathbb{R}$. (Hvorfor?) Når $a \in \mathbb{C}$ har modulus r og v som argument skrives $a = r_v$ i [EJ], men I bør allerede nu vænne jer til den mere almindelige notation

$$a = re^{\mathrm{i}\,v}. \tag{4}$$

Vi fik også udledt de Moivres og Eulers formler,

$$\begin{gathered}(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx), \quad \text{dvs. } (e^{\mathrm{i}\,x})^n = e^{\mathrm{i}\,nx}, \\ \cos x = \tfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\,x} + e^{-\,\mathrm{i}\,x}) \\ \sin x = \tfrac{1}{2\,\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\,x} - e^{-\,\mathrm{i}\,x}).\end{gathered}$$

Jævnfør (4.33), (4.40) og (4.41) i [EJ].

19. gang, tirsdag den 30. november.

- **12.30–12.50:** Repetition af kapitel 4.3 i [EJ], med hovedvægten på ligninger af anden grad, og sætning 4.4 gennemgås i denne forbindelse.

- **12.50–14.45:** Som træning tager vi opgaver i:

  koncepterne: Diskuter i fællesskab opgave 422,(a)+(b), og vær sikre på at alle i gruppen har forstået dem. De entusiastiske laver også nr. 423.

  basal regning: Opgave 410 og 411.

  andengradsligninger: Nr. 424 og 425.

  tabelværdier for cosinus og sinus: For at finde $\cos \frac{\pi}{12}$ gøres følgende:

  – Udtryk $e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$ vha. $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$.
  – Vis at $z = 4e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$ løser

  $$z^2 = 16e^{\mathrm{i}\,\pi/6}.$$

  Find løsningsmængden til denne ligning.

  - Løs også ligningen ved at bruge sætning 4.4 i [EJ], og verificer at

$$\cos(\pi/12) = \sqrt{6} + \sqrt{2}, \quad \sin(\pi/12) = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$$

    (Et ekstrakt heraf findes i opg. 446 til [EJ].)

- **14.55–16.15:** Her gør vi de komplekse tal færdige ved dels at gennemgå de binome ligninger og sætning 4.7, der giver et nyt syn på rødderne i *reelle* polynomier. Dels ved at runde af med (resten af) kapitel 4.4 om den *komplekse* eksponentialfunktion.

20. gang, torsdag den 2. december.

- **8.15–8.35:** Lidt repetition og perspektivering om komplekse tal.
- **8.35–10.30:** Her regner vi opgaver i

  binome ligninger: Opgave 430 først, dernæst nr. 427.

  polynomier: Nr. 432 og 434. (Hvor stor hjælp har de komplekse tal givet i denne sag?)

  den komplekse eksponentialfunktion: 436 (a)+(b) (uden Mapleprogrammet), 438 (*vink:* antag det modsatte, og brug at 0 er det eneste tal med modulus 0).

  Eulers og de Moivres formler: 439 (1. del) og 441.

  tabelværdier: Regn opgave 475 for at finde $\cos(\pi/5)$ og $\cos(3\pi/5)$.

- **10.40–12.00:** Her begynder vi på kursets sidste emne, *differentialligninger*, og vi lægger ud med afsnit 1.3 i [EJ] om lineære differentialligninger af første orden. (Senere gennemgår vi 5.3–5.4.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Vedrørende eksamen i januar kan man finde pensum på nettet under:

`http://www.tnb.aau.dk/stud_info/eksamen/`.

21. gang, mandag den 6. december. NB ! NB !! Bemærk tidspunktet !

- **12.30–12.50:** Repetition af panserformlen fra kapitel 1.3 i [EJ].
- **12.50–14.45:** Som opg. i differentialligninger ses på 102 og 108–110 i [EJ].

  Dernæst kan I bruge tiden på prøveopgaverne 1-6.
- **14.55–16.15:** Vi fortsætter med differentialligningerne, nu med andenordenstilfældet efter kapitel 5.1–5.2 i [EJ].

22. gang, tirsdag den 7. december.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering.
- **12.50–14.45:** Som typeopgaver regnes 503–508 i [EJ].

  Lidt andre aspekter belyses ved at se på *begyndelsesværdiproblemerne* i opgave 509. Regn også denne !
- **14.55–16.15:** Her påbegyndes afsnit 5.3 i [EJ] om *inhomogene* andenordens differentialligninger med konstante koefficienter.

23. gang, torsdag den 9. december.

- **8.15–8.35:** Repetition mv.
- **8.35–10.30:** Ved opgaveregningen belyses:

  eksistens- og entydighedssætningen via opgave 501–502. Diskuter dem grundigt så alle i gruppen er enige i konklusionerne.

  linearitet i opgave 510.

  dobbeltrodstilfældet i nr. H88,(1)–(3), på side 99–100 i opgavehæftet.

  inhomogene ligninger ved *gættemetoden* i opgave 512, 513 og 514.

  Bemærk at man til inhomogene ligninger skal benytte sætning 5.4 (2), og derfor *gætte* en enkelt (dvs. partikulær) løsning — dette gøres ved for eksempel i opgave 513 at ansætte $x(t) = a+bt+ct^2+dt^3$ og så bestemme $a, \dots, d$ ved at indsætte i differentialligningen (mere generelt gættes på en funktion, der ligner højresiden i differentialligningen).
- **10.40–12.00:** Her gennemgås resten af kapitel 5.3 i [EJ] og vi fortsætter med 5.4 om de inhomogene ligninger og *superpositionsprincippet*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

24. gang, tirsdag den 14. december. Da vi ikke har ret meget mere at gennemgå, sættes ekstra tid af til opgaverne:

- **12.30–13.15:** Her afrundes gennemgangen af differentialligningerne, dels med mere om gættemetoden og komplekse løsninger; dels evt. med omtale af partikulærløsninger via såkaldte Wronski-determinanter.

- **13.15–16.15:** Vi træner i inhomogene ligninger via opgaverne 514, 519 (*vink:* superpositionsprincippet) samt 575 (*Vink:* Regn komplekst eller brug Wronskideterminanter).

  Yderligere indsigt kan opnås via 539 og 541 (NB. I 541 er funktionen på højresiden $\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ (kaldet hyperbolsk cosinus), og det er bekvemt bare at bruge dette udtryk.)

  Endelig regnes gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

  NB ! Husk at spørge hjælpelærerne mens de står til rådighed !

25. gang, torsdag den 16. december. Dette er kursets sidste gang, og vi bruger tiden til at runde kurset af; det er nok bedst at jeg lægger ud med dette og vi så dernæst udelukkende regner opgaver.

Bemærk derfor tidsplanen nedenfor.

- **8.15–9.00:** Her gives en oversigt over kurset og nogle afsluttende bemærkninger.

- **9.00–12.00:** Til denne sidste opgaveregning er vi, som normalt, bistået af hjælpelærerne i to timer, her ca. 9.30–11.30.

  Vi beskæftiger os med de sidste prøveopgaver, som er nr. 7 (om komplekse tal) og 8 (om differentialligninger) samt den fagrelevante prøveopgave A (den er tilgængelig på min webside).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I *Matematisk regne- og fremlæggelsesteknik 1* (MR1) vil det være bekvemt at tage udgangspunkt i studieordningens ord om:

Indhold: Funktioner af 2 og 3 variable, integraler heraf og differentialligninger.

Formål: At udvikle de studerendes problemløsningsfærdigheder via eksempler fra matematisk analyse og at formidle løsninger skriftligt og mundtligt.

Som det fremgår har vi brug for nogle eksempler, og her vil jeg foreslå at vi bruger prøveopgaverne 1–8 og A !

Til den skriftlige formidling kan vi nøjes med at lade jer aflevere en besvarelse af en af disse opgaver. Ellers udnytter vi tiden til at træne jer i problemløsning og mundtlig fremstilling efter følgende program:

Vi ser på prøveopgaverne i følgende rækkefølge: Nr. 3 og 4 om formiddagen den 3/1, nr. 2+7+8 den 3/1 eftm.; nr. 1+5 den 4/1 form., nr. 6+A den 4/1 eftm.

NB ! Onsdag den 6/1 om formiddagen er der ingen 'øremærkede' opgaver, men vi bruger tiden dels til opsamling af de spørgsmål I stadig måtte have, dels til at I gruppevist udarbejder og afleverer en skriftlig besvarelse af en prøveopgave, jeg vælger senere. Vi mødes i auditorium 4 klokken 8.15.

Både mandag og tirsdag organiserer vi os således:

Om formiddagen:.

- **8.15-9.00:** Oplæg fra mig i auditorium 4 om teoridelen af prøveopgaverne.
- **9.00–12.00:** I grupperne diskuterer I først hvilke dele af teorien, det vil være godt at fremføre til det givne spørgsmål (og hvilke man f.eks. af tidsmæssige grunde helt bør afstå fra at komme ind på).

  Dernæst skiftes I til at gennemgå den pågældende opgave for hinanden ved grupperummenes tavler — hjælpelærerne og jeg kommer rundt og hører på, og I skal også lytte aktivt (!!) og komme med kritik af hinandens præsentationer.

Om eftermiddagen:.

- **12.30–16.00:** Her arbejdes i grupperummene efter samme recept som ovenfor; dette afbrudt af
- **14.30–15.00:** Afrunding i auditoriet af fælles problemer med emnerne (aflyses hvis der ikke er behov).

Som nævnt bestås MR1 ved aflevering af en skriftlig opgavebesvarelse pér gruppe; denne skal underskrives af alle gruppemedlemmer. Godkendelse forudsætter at 3/5 er udfærdiget korrekt (jvf. studieordningen).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen