Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[P] Functional analysis in applied mathematics and engineering, CRC Press 1999.

Jeg regner med at vi gennemgår kapitel 1–6 med tillæg fra andre bøger efter behov. Kapitlerne 7–12 kan måske give inspiration til specialeskrivningen eller være til hjælp til senere i studiet. Bogen skulle være forholdvist nem at læse og blive klogere af.

Forslag til vinterferie: Uge 7. Jeg er i hvert fald fraværende onsdag den 14/2. Seancen indplaceres senere.

1. gang, onsdag den 7. februar 2001, kl. 8.15–12.00. Vi mødes i G5-110 klokken 8.15.

Først skal vi tale om kursets forløb og eventuelle særlige ønsker til indhold mm, siden gennemgår jeg kapitel 1, hvor vi skal have et nyt perspektiv på metriske rum.

Fra ca. 10.15 kan I se på følgende (repeterende) opgaver fra bogen:

$$2, 3, 5, 6, 9.$$

Konstruktionen af produktrum er egentlig vigtig — også for kurset — så regn gerne

> 11 og 7 (eller bedre: generaliser resultaterne for $\mathbb{R}^n$ i opg. 11 til generelle metriske rum).

2. gang, onsdag den 21. februar 2000, kl. 8.15–12.00. Vi begynder klokken 8.15 med

Øvelser:

(1) Regn opgave 6 (hvis du ikke nåede den sidste gang); til trekantsuligheden kan man vise at hjælpefunktionen $f(a) = a/(1 + a)$, defineret for $a \geq 0$, opfylder $f(a) = 1 - 1/(1 + a)$ og derfor er voksende.

Vis også at d_1 frembringer den samme topologi på M som den givne metrik d. (Hvorfor bliver spørgsmålet om nulfølgerne trivielt?)

(2) Lad der være givet to topologiske rum, det vil sige en mængde S_j der er forsynet med en topologi τ_j, for $j = 1$ og 2. Vis da: 1° at man på produktmængden $S_1 \times S_2$ har følgende topologi:

$$\tau = \Big\{ \bigcup_{\alpha \in A} O_{1\alpha} \times O_{2\alpha} \;\Big|\; O_{j\alpha} \in \tau_j \text{ for } j = 1 \text{ og } 2 \text{ og alle } \alpha \in A \Big\}.$$

2° at dette er lig med den *mindste* topologi med den egenskab at $p_j(x_1, x_2) = x_j$ er kontinuert fra $S_1 \times S_2$ til S_j for $j = 1$, 2.

Indse at 1° og 2° kan generaliseres (på oplagt måde) til *endelige* produktmængder $S_1 \times \cdots \times S_k$. (For uendelige produktmængder giver 1° og 2° faktisk to *forskellige* topologier...)

(3) 9, 12 og 10.

(4) Overvej dels om du kan regne opgave 1, dels at resultatet kan fortolkes som en tæthed af en mængde i en anden.

(5) Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Fra kl. 10.15 fortsættes der med resten af kapitel 1 om fuldstændiggørelser af metriske rum og kapitel 2 om Banachrum.

3. gang onsdag den 28. februar, kl. 8.15–12.00. Om Hölders og Minkowskis uligheder for funktioner i $C_0(\mathbb{R})$ bemærkes at det egentlig er lidt 'snyd' at forfatteren bare opskriver dem også for vilkårlige elementer af L^p-rummene; det er der endnu ikke belæg for, men vi vil muligvis bringe det i orden. (I integrationsteorien vises ulighederne i en *langt* større generalitet).

Øvelser:

(1) Opgaverne 28 og 30 (som øvelser i grundbegreber og eksempler).

(2) 32 og 33 for at lære at lave nye Banach-rum ud fra gamle; vis også at der i opgave 33 kan bruges andre, ækvivalente normer.

(3) Vis at på et normeret rum V er additionen er en kontinuert afbildning

$$V \otimes V \to V$$

og at skalarmultiplikationen er kontinuert

$$V \otimes \mathbb{C} \to V.$$

NB ! Disse egenskaber er ikke bare sjove, men også vigtige !

(4) Eventuelt gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Klokken 10.15 forelæses der over kapitel 3; jeg bliver nok ikke helt færdig, men resten følger så sammen med dele af kapitel 4 den 7/3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

I forbindelse med opgave 30 fra sidste gang dukkede spørgsmålet op, hvorfor rummet af C^1-funktioner ikke er fuldstændigt med sup-normen. Grunden er meget enkel: Man kan lave en følge af C^1-funktioner som konvergerer uniformt mod en ikke-differentiabel funktion. Betragtes eksempelvis $x \mapsto |x|$, så er den uniform grænse for $f_n(x) = (x^2 + \frac{1}{n})^{1/2}$, som man let indser. (Vis det !!)

4. gang onsdag den 7/3 2001. Som dagens mentale knæbøjninger (og forberedelse til forelæsningen) kan I lave

(1) Vis, at når V er et normeret rum og $x_n \to x$ og $y_n \to y$ for $n \to \infty$, da gælder at $x_n + y_n \to x + y$ for $n \to \infty$; og tilsvarende at for $\lambda_n \to \lambda$ i $\mathbb{C}$ for $n \to \infty$, da gælder også at $\lambda_n x_n \to \lambda x$ i V for $n \to \infty$.

Slut af det ovenstående at regneoperationerne i et normeret rum altid er *kontinuerte !* (Hvad menes der mere præcist med dette ?)

(2) Generelt defineres (OBS !) et *topologisk* vektorrum til at være et vektorrum V, som er udstyret med en Hausdorff-topologi τ, som ikke nødvendigvis kommer fra en metrik, men som bare opfylder at regneoperationerne er kontinuerte. Specificer hvad der menes med dette sidste krav.

(Hvis du er interesseret i topologiske vektorrum, kan du vise at der for en fast vektor $a \in V$ og en fast skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ gælder at de lineære operatorer $T_a(x) = x + a$ og $D_\lambda(x) = \lambda x$ er homeomorfier. Dernæst kan det sluttes at når $O \in \tau$ så er både $T_a(O) =: a + O$ og $D_\lambda(O) =: \lambda O$ også åbne.)

(3) Læs definition 3.3 og vis så at der for enhver begrænset, lineær operator $T\colon V \to W$ gælder at

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\, \|Tx\| \mid x \in V,\ \|x\| < 1\,\}\\ &= \sup\{\, \|Tx\| \mid x \in V,\ \|x\| = 1\,\}\\ &= \inf\{\, M \geq 0 \mid \forall x \in V\colon \|Tx\| \leq M\|x\|\,\}.\end{aligned}$$

Vis også at det i 1. og 2. linie er tilstrækkeligt at medtage de x i et tæt underrum U, som opfylder de respektive krav til $\|x\|$.

(4) Opgave 40.

(5) Mere krævende: Vis at hvis V er et normeret rum af dimension k, så er der altid en lineær homeomorfi af $\mathbb{C}^k$ på V. (Vink: Betragt afbildningen som sender et n-tuppel over i den tilhørende linearkombination af vektorerne i en fastholdt basis for V; for at vise at inversen er kontinuert kan du regne opgave 35 ved hjælp af et indirekte bevis.)

Vi slutter af med at gennemgå resten af kapitel tre.

Der er et par væsentlige trykfejl i den sidste formel på side 27 og to linier længere nede samt første formel på side 28: Alle tre steder skal

$$\lim_m \|T_m - T_n\|$$

erstattes af

$$\limsup_m \|T_m - T_n\|,$$

fordi grænseværdien ikke nødvendigvis eksisterer. (NB ! $\limsup$ eksisterer for *enhver* reel talfølge (repeter !) og er derfor langt lettere at bruge end limes, når man skal vise uligheder.)

Det kan også bemærkes at et normeret rum V altid har et Banachrum som fuldstændiggørelse. Sagt mere præcist, så har vi set at et normeret rum som metrisk rum har en fuldstændiggørelse W. Ved at bruge en mindre generalisering af sætning 3.2 (til bilineære afbildninger) kan man vise at additionen, skalarmultiplikationen og normen kan udvides på entydig måde til $W \times W$, $W \times \mathbb{C}$ henholdsvis W; og dernæst kan man så vise at aksiomerne for et vektorrum og for en norm alle er opfyldte på W (fordi de gælder i den tætte delmængde V). Derved bliver W organiseret som et normeret rum, det er konstrueret til at være fuldstændigt; altså er det et Banachrum.

På tilsvarende måde kan man også vise at ethvert indre produktrum har en fuldstændiggørelse, der er et Hilbertrum. Denne bemærkning anføres her i tilknytning til definition 4.4 i dagens program.

5. gang onsdag den 14. marts. Dagens appetitvækker består af:

(1) Opgaverne 41, 42 og 43.

(2) Opgave 45. (Dette resultat bør I kende.)

(3) Opgave 38. Hertil har I brug for opgave (5) fra sidste gang.

(4) Gamle opgaver.

Klokken 10.15 forsætter vi med afsnit 4.1–4.2 ff. om Hilbertrum og ortonormale baser for disse.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Nedenstående to opgaver er obligatoriske for dem der skal have godkendt 3 modulers studieaktivitet; der kommer i alt formentlig 8 sådanne opgaver, hvoraf de 6 skal godkendes.

Opgaverne 1 og 2 skal afleveres **onsdag den 21/3 2001** med henblik på godkendelse. (Selvom opgaverne diskuteres in plenum er det en nødvendig betingelse for godkendelse at besvarelserne udformes individuelt (og læseligt) af de enkelte.)

Opgave 1. Repetition: Givet et metrisk rum (M, d), så er en *fuldstændiggørelse* af M et par bestående af et fuldstændigt metrisk rum (M_1, d_1) og en afbildning $T\colon M \to M_1$, som er en *isometri* af M på et tæt delrum af M_1.

Bevis følgende

Sætning: *Ethvert metrisk rum (M, d) har en fuldstændiggørelse.*

Vink: Man kan fastholde et punkt $z \in M$ og se på familien af afbildninger

$$f_y(x) = d(x, y) - d(x, z), \quad x \in M,$$

parametriseret ved punkterne y i M. Man kan så vise (alene ved gentagen brug af trekantsuligheden), at denne familie ligger i

$$M^* = \{\, f\colon M \to \mathbb{R} \mid f \text{ er kontinuert og begrænset} \,\}.$$

Med $d_\infty(f, g) = \sup_M |f - g|$ er M^* et fuldstændigt metrisk rum (hvilket skal antages kendt (overvej om du har set det bevist.)).

Opgave 2. Vis følgende resultat om at fuldstændiggørelser er entydigt bestemt op til isometri:

Sætning: *Hvis $S\colon M \to M_1$ og $T\colon M \to M_2$ er to fuldstændiggørelser af et metrisk rum M, da findes en isometri af M_1 på M_2.*

Vink: Isometrien defineres ved hjælp af en udvidelse R_1 af afbildningen $R = T \circ S^{-1}$ (hvor er R defineret ?); hertil kan man søge inspiration i bogens sætning 3.2 og forelæsningens bevis derfor, idet man dog først skal vise at R er afstandsbevarende. Dernæst ses at R_1 er injektiv. Surjektiviteten fås ved først at udvide $S \circ T^{-1}$ på analog måde til en kontinuert afbildning $R_2\colon M_2 \to M_1$; dernæst kan man indse at $R_2 \circ R_1 = I_1$ og at $R_1 \circ R_2 = I_2$, hvor I_j er identitetsafbildningen på M_j. Endelig ses at R_1 er en isometri af M_1 på M_2 med R_2 som invers.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Ad kapitel 4: Definitionen af ortonormal basis s. 37 skal tages bogstaveligt; dvs. det er en Schauderbasis som defineret s. 21, men som også er en ortonormal delmængde af det givne indre produkt-rum. Dette bliver ikke helt klart i det følgende, for det bliver stiltiende brugt at: 1° En mængde er lineær uafhængig, hvis den er ortogonal; 2° I en konvergent uendelig række $x = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$ er koefficienterne α_j entydigt bestemt, når (e_n) er en ortonormal følge. Begge dele er oplagt nødvendigt i henhold til den generelle definition af basis; mens 1° er velkendt kan 2° ses i forbindelse med formel (4.12).

At man taler om o.n.b. for vektorrum med indre produkt, og ikke bare for Hilbertrum, er bekvemt i eksempelvis sætning 4.8.

Bemærk at sætning 4.9 bør præciseres lidt: For en ortonormal følge er basisegenskaben ækvivalent med *hver* af egenskaberne (i), (ii) og (iii), der er nævnt i sætningen. (Og ikke bare med den ene af dem.)

6. gang onsdag den 28. marts. Dagens opgaver er:

(1) Opgave 50 om de famøse polariseringsidentiteter (der viser at sesquilinearformer er bestemt alene ved deres værdier på *diagonalen* i $V \times V$).

(2) Opgaverne 47 og 48 (om at differentiere).

(3) Opgave 54 (om at lave flere Hilbertrum ud fra de allerede kendte).

(4) Gamle opgaver.

Vi bliver delvist færdige med kapitel 4.4. i [P].

7. gang onsdag den 4. april. Morgengymnastikken består i følgende øvelser:

(1) Opgave 51; her karakteriseres de normer der udspringer af et indre produkt.

Regn evt. også den tilsvarende opgave for et komplekst vektorrum: hvis en norm opfylder parallellogramidentiteten, så defineres der et indre produkt på V ved polariseringsidentiteten. (Vink: Man kan med fordel bruge det reelle resultat i forbindelse med repræsentationen $(\, x \mid y\,) = \langle\, x,\, y\,\rangle + \mathrm{i}\langle\, x,\, y\,\rangle$, hvor $\langle\, x,\, y\,\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ ifølge det viste er et indre produkt på V betragtet som reelt vektorrum.)

(2) Opgave 52 (eksempel på en norm der ikke udspringer af et skalarprodukt).

(3) Opgave 60.

(4) Gamle opgaver.

Forelæsningen når antageligt til og med afsnit 5.1.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Med gennemgangen af afsnit 4.1–4.4 har vi afsluttet diskussionen af geometriske forhold i uendelig dimensionale rum. I den sammenhæng har vi nydt godt af at tingene har givet mange mindelser til hvad der gælder i $\mathbb{R}^n$.

Den store udfordring kommer derfor nu da vi skal til at studere operatorerne *mellem* Banach- og Hilbertrum. Dette er langt mere interessant end rummene selv, blandt andet fordi det er den del af teorien som lader sig anvende i mange grene af matematikken. Og som vi skal se i kapitel 5 og 6, gælder der her forskellige sætninger, der langt stærkere end hvad man umiddelbart ville have troet.

8. gang onsdag den 11. april 2001. Følgende opgaver foreslås:

(1) Til repetition: 56, 59 og 60.

(2) Opgaverne 61 og 77+78 (fundamentale).

(3) Opgaverne 57 og 68 (giver gemen træning).

Vi fortsætter med afsnit 4.4 (side 52), 4.5 og 5.1.

Rettelser:

- På side 57 skal den første linie af beviset være: "We have only to show that $\overline{T(H)}^{\perp} = T(H)^{\perp} =$".
- På side 59 skal linien før sætn. 5.4 rettes til "is 'linear' with respect to x.'. (Det trykte giver ej mening, og selv efter rettelsen er det noget søgt.)
- På side 63 skal beviset for sætning 5.10 i første afsnit være: "To show that T is compact, let A be a bounded set in H. Given a sequence (y_n) in $\overline{T(A)}$, take for each n some $x_n \in A$ such that $\|Tx_n - y_n\| < 1/n$, as we may. It then suffices to show the existence of a subsequence x_{n_k} for which Tx_{n_k} converges to some y for $k \to \infty$, for by the definition of the x_n it follows that $y_{n_k} \to y$ for $k \to \infty$."

9. gang onsdag den 18. april 2001. Til denne lejlighed har jeg udvalgt

(1) Vis at $(S+T)^* = S^* + T^*$ gælder for $S, T \in \mathbb{B}(H)$, når H er et Hilbertrum. Efterprøv også påstandene i bemærkning 5.1 i [P].

(2) Opgave 74 og 83 som repetition.

(3) Opgave 80 og 81 drejer sig om fundamentale ting, mens

(4) opgave 76 og 82 giver lidt bredere træning.

Programmet bliver dels afsnit 5.2 og dels 5.3 frem til og med definition 5.4.

De følgende obligatoriske opgaver afleveres senest den 25. april.

Opgave 3. Vis, for normerede rum V og W, at operatornormen er en norm på rummet $\mathbb{B}(V, W)$ af begrænsede, lineære afbildninger af V ind i W. Vis dernæst at der på $\mathbb{B}(V)$ gælder at multiplikationen ST af to operatorer S og T er kontinuert. (Du skal herunder formulere præcist hvad der menes med dette.)

Opgave 4. Bevis at der for et Hilbertrum H defineres en afbildning $\Phi\colon H \to H^*$ ved at sætte $\Phi(y)$ til at være det lineære funktional $x \mapsto (\, x \mid y \,)$. Vis så at

- Φ er konjugeret lineær, dvs. $\Phi(\alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}\Phi y + \bar{\beta}\Phi z$,
- Φ er normbevarende, dvs. at $\|\Phi y\|_{H^*} = \|y\|_H$,
- Φ er en bijektion af H på H^*.

Verificer så at $\Phi\colon H \to H^*$ er en konjugeret lineær isometri. (Dette er en mere præcis formulering af Frechét–Riesz' sætning, jævnfør sætning 4.14 i [P].)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

10. gang onsdag den 25. april. Opgaver:

(1) Som repetition af det gennemgåede: Nr. 112, 89, 116.

(2) Som fundamentale opgaver nr. 80 og 123.

(3) Desuden: Gamle opgaver.

Vi gør desuden afsnit 5.2 færdigt ved forelæsningerne. Visse ting behøver en bedre forklaring end bogens (blandt andet hvorfor operatorer med endelig rang er kompakte), så det vil blive uddybet. Er der tid vil jeg gennemgå det indledende i afsnit 5.3 om operatorer med lukket graf.

11. gang onsdag den 2. maj 2001. Følgende opgaver:

(1) Til repetition: 120, 114 og 118.

(2) Af fundamental karakter: 121 og 125,

(3) Nr. 126 til almen træning.

Derefter er intentionen at gøre afsnit 5.3 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Den 12. gang fredag den 4. maj 2001. Da blev kapitel 5 om spektralteori genemgået frem til approksimative egenvektorer side 82. (Som vi tidligere har talt om overspringes beviset for sætning 5.13, da det er ufulstændigt i bogen.)

Den 13. gang onsdag den 9. maj. Regn opgaverne

(1) 99 til repetition af lukket operator (brug definitionerne),

(2) Lad et Hilbertrum H have ortonormal basis (e_n) og lad T være den operator i H der er defineret på $\operatorname{span}(e_n)$ ved at $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$ føres over i $(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j)e_1$. Vis da at T ikke kan aflukkes. Find desuden T^* og $\overline{G(T)}$.

Vink: Find normen af $v_n = \frac{1}{n}e_1 + \cdots + \frac{1}{n}e_n$.

(3) 131 som en indføring i begrebet normal operator,

(4) 101 og 129 til træning.

Vi fortsætter med emnet spektralteori. Dette går ganske enkelt ud på at analysere operatorer ved hjælp af noget så simpelt som punktmængder i den komplekse plan. Vi når antageligt at gøre kapitel 6.1 færdigt.

14. gang onsdag den 16. maj. Vi laver først:

(1) Gennemregn, som repetition, bogens eksempel 6.3.

(2) Opgave 106 og 109.

(3) Opgaverne 129 og 130.

Dernæst gennemgås resten af kapitel 6, især funktionskalkylen i sætning 6.11 — det er en vigtig pointe at der på grund af sætning 5.11 (i den præcise udgave der er gennemgået) ikke er behov for bogens bevis !

Som en klassisk anvendelse skal vi se i eksempel 6.5 at man kan tage *kvadratrødder* af visse operatorer.

15. gang onsdag den 23. maj. Vi begynder kl. 8.15 med det vigtigste af kapitel 7. Hovedsigtet er at vise at integraloperatorer altid er kompakte; dette sker via begrebet Hilbert–Schmidtoperatorer.

Dernæst træner vi, for sidste gang, med

(1) Opgave 138 som repetition.

(2) Som introduktion af positiv operator, nr. 133.

(3) Som træning i integraloperatorer: Opgave 160.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Pensumopgørelse. Alt det gennemgåede er pensum, og det beløber sig dermed til bogens kapitler 1–7. Der er dog følgende undtagelser: s. 8_7–10; s. 44_7–48^9; eksempel 5.7; s. 96–100.

For at få godskrevet tre moduler fra kurset er det tilstrækkeligt at få godkendt to ud af de følgende fire opgaver; de bedes afleveret senest 1. juni 2001.

Opgave 5. Betragt følgende udgave af lukket-graf-sætningen:

Lad V og W være Banachrum og lad T være en lineær operator fra V til W. Da medfører enhver konjunktion af to af de nedenstående udsagn det tredje:

(i) *$D(T)$ er lukket i V.*

(ii) *T er en lukket operator.*

(iii) *T er begrænset (på $D(T)$).*

Bevis $(\mathrm{i}) \wedge (\mathrm{iii}) \implies (\mathrm{ii})$ og $(\mathrm{ii}) \wedge (\mathrm{iii}) \implies (\mathrm{i})$ (den udeladte har vi set).

Opgave 6. Lad P være en kompakt ortogonal projektion på et lukket underrum M af et separabelt Hilbertrum H. Udled at $\sigma(P) \subset \{0, 1\}$ ved at bruge funktionalkalkylen i sætning 6.11 til at slutte at ethvert $\lambda \in \sigma(P)$ opfylder $\lambda - \lambda^2 = 0$. Afgør dernæst om $\sigma(P)$ indeholder punkter udenfor punktspektret.

Opgave 7. Lad $S \in \mathbb{B}(U, V)$ og $T \in \mathbb{B}(V, W)$, hvor U, V og W er normerede rum. Hvis at operatoren TS er kompakt dersom enten S eller T er kompakt.

Opgave 8. Vis at for en kompakt operator T på et uendeligdimensionalt, separabelt Hilbertrum H gælder der altid at $0 \in \sigma(T)$, dvs. at nul tilhører spektret for T. Kan det forekomme at 0 ligger udenfor punktspektret ?

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Pensumopgørelse. Som pensum for de supplerende 9 moduler er der desuden følgende: Baseret på bogen “Analysis now, second edition”, af Gert Kærgård Pedersen, afsnittene 2.1–2.5.2, 3.2.1–3.2.3, det udleverede 10-siders notat (betegnet Mat 313), der erstatter kapitel 4.1 (+4.3.11) og 4.6.1, samt som kursorisk stof kapitel 1.

I bogen “Functional Analysis, revised and enlarged edition”, af Michael Reed og Barry Simon, opgives afsnit VII.1.

Endelig er der kapitel 2 i notesættet “Matematik 3MA, Moderne analyse med anvendelser”, Københavns Universitet 1995 af G. Grubb. Dog er afsnit 2.4 og 2.7 kursorisk.

Eksamensspørgsmål. Eksamen d. 8. juni er mundtlig med 40 minutters forberedelse og omkring en halv times eksamination; de første godt 25 minutter af eksaminationen forløber med gennemgang af det forberedte, og derefter stilles korte spørgsmål i resten af pensum ca. 5–10 minutter.

Bemærk at det er en del af jeres opgave at afgrænse de brede eksamensspørgsmål, der er som følger:

(1) Hilbertrum — basis, projektionssætningen, lineære funktionaler;

(2) Banachrum — Hahn–Banachsætningerne;

(3) Baires sætning og dens anvendelser;

(4) Svag*-topologier og deres egenskaber;

(5) spektrum for en begrænset operator på et Hilbertrum;

(6) kompakte operatorer på Hilbertrum;

(7) spektralsætningen for en begrænset operator på et Hilbertrum;

(8) Ubegrænsede symmetriske og selvadjungerede operatorer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen