Oversigt nr. 1

I kurset i skal vi bruge D. C. Lay:"Linear algebra and its applications", 3. udgave Addison–Wesley 2003; i store træk bliver det kapitel 1–3 og 5.1–5.3.

Som regel vil hver seance omhandle circa et/to afsnit i bogen.

1.gang, tirsdag den 3. februar 2003.

Vi er her i auditorium 4 **kl. 12.30–13.50:**, hvor jeg efter en introduktion til kurset vil forelæse over "lineære ligninger" (afsnit 1.1) og temaet bliver *hvad, hvorfor og hvordan*. Det vil sige, hvad er lineære ligninger, hvorfor er det nyttigt at beskæftige sig med dem (eksempler vil blive givet), og hvordan løser man dem.

Som I vil få at se er der en meget systematisk og overskuelig måde at løse lineære ligninger på. Selve løsningsmetoden vil vi bruge en del kræfter på både at indøve og forstå, for den bliver central for os i hele kurset. Om kort tid vil det derfor være en overkommelig opgave for jer at løse 7 ligninger med 7 ubekendte (tro det om I kan..). I kan læse om det i afsnit 1.1.

Kl. 14.00–16.15 Her mødes vi i grupperrummene til en nærmere snak om bogen og kurset sammen med hjælpelærerne. For at få en blid start, og for at stifte nærmere bekendtskab med bogen (og især de store anstrengelser Lay gør sig for at I kan få et godt udbytte), laver vi følgende opgaver:

- "Practice problems 1–4" side 10. Disse kan løses på grundlag af forelæsningen alene (men er ment som *træningsopgaver* efter man har læst afsnittet — I opfordres hermed til at løse træningsopgaverne hver gang et afsnit er læst/gennemgået).

- **Sandt/falsk-opgave**: Diskuter opgave 23 side 12 i gruppen, men husk at *begrunde* jeres svar, som teksten før opgave 23 kræver !

- **AHA-opgaven**: Løs ligningssystemet i eksempel 1 side 5 på følgende måde: Først isoleres x_1 i 1. ligning og substitueres i 3. ligning. Dernæst isoleres x_2 i 2. ligning og indsættes i den nye 3. ligning (men ej i nr. 1). Derved er x_3 blevet bestemt; der bør jævnføres med midten af side 6 i bogen. Resultatet substitueres i ligning 1 og 2. Fortsæt indtil også x_1 og x_2 er bestemt.

  Ved at sammenligne med bogens gennemgang skulle to ting nu gerne stå klart: Dels optræder alle mellemfacitter i substitutionsmetoden også ved at bruge bogens metode (de to metoder er altså to sider af den samme sag), dels er bogens fremgangsmåde langt mere overskuelig.

NB ! 2. gang. bliver den 17. februar.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

2. gang, tirsdag den 17. februar.

- **12.30–12.50:** Her repeterer vi indholdet af afsnit 1.1 med vægt på de vigtigste konklusioner derfra.

- **12.50–14.50:** For at dygtiggøre os/jer ser vi på følgende:

  Sandt/falsk: Diskuter i gruppen opgave 1.1.24, så I er sikre på I alle er enige i konklusionerne.

  Rækkeoperationer: For at træne dette laves 1.1.3+5–7+11+13. NB ! Gå systematisk til værks !

  Konsistens: Regn 1.1.15–18. Hvad vil Lay opnå med ordren “do not completely solve the systems.” ??

  Anvendelser: Lav 1.1.33+34.

- **14.55–16.15:** Her gennemgås afsnit 1.1.2, hvor vi skal på hvilke matricer rækkeoperationer i almindelighed kan føre os til (man kan ikke altid opnå et-taller i diagonalen); vi indfører i den forbindelse en standardform kaldet en echelonmatrix.

Fra latinskolen: Det hedder en matrix, matricen og flere matricer. (Og selv når man så har bøjet dem, så kan det aldrig blive til en “matrice” i ental.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

3. gang, den 24. februar. Som forberedelse til dagens seance bedes I læse kapitel 1.2 i Lays bog og dele af 1.3, nemlig det velkendte for $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ og $\mathbb{R}^n$ inklusive det nye begreb *linearkombination*, som også blev omtalt sidste gang.

Desuden bør I regne øvelsesopgaverne ('practice problems' side 24) samt sandt/falsk-opgaven 1.2.21.

- **12.30–12.50:** Repetition fra afsnit 1.2 og 1.3 i Lays bog.
- **12.50–14.45:** Opgaveregning i følgende (de er mange, men ej tekniske):

  Reversering: Diskuter i fællesskab 1.1.29–32, og se til at du selv, og alle andre i gruppen!, forstår svarene.

  Sandt/falsk: Samme fremgangsmåde som ovenfor men med 1.2.22.

  Echelonform: Regn 1.2.2.

  Konsistens: 1.2.15+16.

  Frie variable: Lav 1.2.9+11+12+13. Angiv gerne facit som en parameterfremstilling af vektorerne i løsningsmængden.

  Data: Vi har indført betegnelsen *data* for leddene på højre side af et ligningssystem; dette sigter til den situation hvor man har målt disse tal og dernæst vil bestemme de interessante tal som værende løsningen til ligningssystemet.

  Noget overraskende viser dette sig at være et *særdeles* kildent emne. At det kan gå 'galt' allerede for 2 ligninger med 2 ubekendte ses ved at lave: **opgave 2.3.41**.

  Hvor pålideligt tror I resultatet er når man sætter en regnemaskine eller computer til at løse 10 ligninger med 10 ubekendte ? (Man skal vide mere om matricer før pålideligheden kan vurderes.)

  Interpolation: Dette er en almindeligt brugt videnskabelig metode, I givetvis vil møde senere; her giver den lidt træning i lineære ligninger via: opgave 1.2.33.

  Har du en avanceret regnemaskine kan du lave 1.2.34 også.

- **14.50–16.10:** Her gennemgås kapitel 1.3 og 1.4 i Lays bog.

  Vi skal nu til at se nærmere på geometrien bag løsningen af lineære ligningssystemer. Det vil involvere at vi kan tale om vektorer i $\mathbb{R}^n$ også for $n \geq 4$, og at vi lærer mere om hvad man kan med matricer, eksempelvis gange vektorer med dem. Det lyder måske altsammen mærkeligt, men det giver os ret hurtigt et bedre overblik, som I vil få at se.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

4. gang, tirsdag den 2. marts. Som forberedelse bedes I læse afsnit 1.3+1.4 og regne de tilhørende 'praktikproblemer' og 1.3.23+1.4.23.

- **12.30–12.50:** Perspektivering og repetition (med fokus på Theorem 4) .
- **12.50–14.50:** Opgaveregingens menukort af lettere anretninger (begrebstræning snarere end regnetræning):

  Vektorer i $\mathbb{R}^n$ 1.3.5+7+9+10. Diskuter i gruppen !

  Sandt/falsk ? 1.3.24. Diskuter i gruppen !

  Regneregler 1.3.33.

  Linear komb. 1.3.11.

  Frembringelse 1.3.18+25. (*Tænkere* kan regne 1.3.22.)

  Matrixprodukt 1.4.1–4.

  Matrixligning 1.4.9+10, 1.4.17–20.

  Sandt/falsk ? 1.4.24 diskuteres til afslutning !

- **14.50–16.10:** Her gennemgås afsnit 1.5+6 i bogen. Et hovedtema vil være at sammenligne løsningsmængderne for inhomogene ligningssystemer med løsningsmængderne for de tilsvarende homogene systemer. (Dette har I faktisk mødt før i en analog situation, nemlig for differentialligninger.)

  Vi vil nok også nå at introducere *lineær uafhængighed* i afsnit 1.7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Sidste gang brugte vi tid til at gennemgå lidt om almene begreber som surjektive og injektive afbildninger. Se bogens side 87 for et sammendrag (men bemærk at jeg faktisk gennemgik begreberne for vilkårlige mængder).

5. gang, tirsdag den 9. marts. Som forberedelse til denne seance bør I læse afsnit 1.4 (fra side 43) og 1.5 og regne opgaverne side 54 og 1.5.23.

Med fordel kan I også læse i afsnit 1.7, som bliver en del af emnet denne gang.

- **12.30–12.50:** Her foretages lidt repetition og perspektivering med fokus på sætning 6 i afsnit 1.5.

- **12.50–14.50:** Til opgaveregningen:

  Konsistens *uden* rækkeoperationer: 1.4.31+32.

  Homogene systemer 1.5.7+9+11+14.

  Sandt/falsk 1.5.24.

  Inhomogene sys. 1.5.29–32.

  Prøveopgave nr. 1 Skriv den ud fra min hjemmeside og regn den !

  Vedr. teorispørgsmålet: Regn 1.5.25 !

  Bemærk hvordan vi i mange tilfælde nu kan afgøre vigtige spørgsmål om eksistens og entydighed af løsninger ved bare at inspicere antallet af rækker og søjler i koefficientmatricerne.

- **14.50–16.10:** Her gennemgår vi afsnit 1.7 og 1.8. Blandt andet skal vi møde en ny ven, *lineær uafhængighed*, og gense vores gamle bekendte *lineære transformationer*, som på mat1a blev omtalt som lineære operatorer; essentielt er der ingen forskel, men her ser vi på det der vedrører $\mathbf{R}^n$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Sidste gang gennemgik vi kapitel 1.7 om lineær uafhængighed og noget af 1.8 om introduktion til lineære transformationer.

Som forberedelse til næste seance bedes man læse det ovennævnte og afprøve sin forståelse af det ved at regne øvelsesopgaverne side 70 og opgave 1.7.21. (NB ! Opgaverne illustrerer mange mulige fejlslutninger i forbindelse med lineær uafhængighed.)

6. gang, tirsdag den 16. marts.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering.
- **12.50–14.50:** Opgaverne er mestendels stillet i *lineær uafhængighed* (som I nok har bemærket er dette begreb yderst centralt).

  Sandt/falsk diskuter opgave 1.7.22 i gruppen !

  Lineær (u)afhængighed 1.7.1–4 som simpel træning; de kan diskuteres i gruppen. Dernæst 1.7.5+7.

  Regn så 1.7.9, og overvej hvorfor (a) og (b) ikke kommer ud på det samme!

  God forståelse (som ofte kan spare mange regninger!) kan fås af opgave 1.7.31–32.

  Endelig er der 1.7.33–40. (De er små og sjove...)

  Den "samfundsvidenskabelige" 1.6.14 (som også er sjov..).

- **14.50–16.10:** Vi gennemgår her resten af afsnit 1.8 og hele 1.9. Hovedtemaet er at studere de *lineære transformationer* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, og som vi skal se i de kommende uger, så vil det åbne for en langt dybere forståelse af hvad der "sker" når man løser m ligninger med n ubekendte. En ting (som vi har set) er at sådanne ligninger kan skrives som en matrixligning $A \cdot x = b$ — begrebsmæssigt er det lige så vigtigt at dette kan tolkes som anvendelse af en lineær transformation (her givet ved A), for dette synspunkt giver et bedre overblik over matematikken og dens anvendelser (samt videnskab i det hele taget. . .).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

7. gang, tirsdag den 23. marts. Som forberedelse til dagens seance bedes man læse afsnittene 1.8 og 1.9 om lineære transformationer. Dernæst regnes som sædvanlig øvelserne, her side 79+90, og sandt/falsk opgaverne 1.8.21 og 1.9.23.

- **12.30–12.50:** Vi begynder med at repetere lidt om lineære transformationer i kapitel 1.9. Som forberedelse til opgaverne omtales sætning 12 i 1.9.

- **12.50–14.50:** Som opgaver i det nye stof ses på:

  Sandt/falsk 1.9.24 diskuteres i gruppen.

  Forbindelsen til pivotsøjler Regn opgaverne 1.9.31+32+35.

  Standardmatricer Lav opgave 1.9.33.

  Linearitet Regn 1.9.36.

  Regn dernæst prøveopgave nr. 2. Og endelig gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **14.50–16.10:** Vi vil her beskæftige os lidt med eksemplerne i afsnit 1.10. Her vil fokus være hvorledes lineære transformationer kan bruges til at løse nye typer af opgaver (eller lave matematiske modeller for nye problemsstillinger).

  Desuden gennemgås afsnit 2.1 om regneregler for matricer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

8. gang, tirsdag den 30. marts.

- **12.30–12.50:** Perspektivering: Da vi sidste gang lærte at *multiplicere* matricer, så kan vi nu i princippet formulere ligninger

$$AX = B, \tag{1}$$

hvor både A, X og B er matricer. Vi skal se at man — af ret oplagte grunde, endda — kan udføre rækkeoperationer også på den salgs ligninger.

Vi skal også se hvordan dette kan give en bekvem metode til at finde standardmatricer for lineære transformationer T. (Jævnfør prøveopgave 2, hvor standard*matricen* jo netop optrådte som en ubekendt.)

- **12.50–14.50:** I grupperne kan I regne:

Matrixregning Opgave 2.1.1+2.

Anvendelser Opgaverne 1.10.11+7(søg evt. inspiration side 95).

Linearitet Lav 1.9.17–20.

Injektivitet(en-entydighed) Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$ og betragt den lineære transformation givet ved $x \mapsto A \cdot x$; er denne afbildning injektiv ? Bestem $\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot x = 0 \}$.
Er afbildningen surjektiv ?

Derudover kan I regne gamle opgaver (se eksempelvis på prøveopgave 2 igen), hvis der er tid til overs.

- **14.50–16.10:** Vi gennemgår afsnit 2.2 og 2.3 om *inversen* A^{-1} til en matrix A: Dels skal vi se på hvad dette begreb overhovedet er; dels skal vi se hvordan man finder A^{-1} i praksis, når A^{-1} eksisterer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Sidste gang så vi hvordan man kan behandle en matrixligning

$$A_{m,n}X_{n,p} = B_{m,p} \tag{2}$$

ved hjælp af rækkeoperationer på den *udvidede* koefficientmatrix $(A\ B)$. Vi så også at dette kan anvendes til finde inversen til en kvadratisk matrix A, fordi A^{-1} løser begge ligninger

$$AX = I_n, \qquad XA = I_n. \tag{3}$$

I [L] findes der i Sætning 8 side 129 en lang række kriterier, for at inversen A^{-1} eksisterer. Vi vil i kursets løb nøjes med at fukusere på ca. tre af disse (dels er det næppe muligt at huske dem alle, dels vil vi se senere at mange af dem følger nemt af noget, vi alligevel skal lære...).

9. gang, tirsdag den 6. april. Regn som forberedelse øvelsesopgaverne side 116 og 2.1.15.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering: Vi har tidligere set at der er en korrespondence mellem matricer og lineære transformationer, og det er derfor naturligt at spørge hvad eksistensen af A^{-1} har af konsekvenser for den lineære transformation, der har A som standardmatrix. Dette belyses ved gennemgang af sætning 9 side 131, og bliver der fokuseret på de mange paralleller til definitionen af A^{-1}.

- **12.50–14.50:** De følgende opgaver er mange, men de fleste er helt ligetil, så de skulle kunne nås.

  Matrixprodukt: 2.1.5+7+13.

  Abnormiteter: 2.1.9+10+12.

  Injektiv: 2.1.23.

  Invers matrix: 2.2.1+5+7.

  Matrixligninger: 2.2.8+11+13.

  Mange af disse ting belyses også i prøveopgave 3, som I kan regne.

- **14.50–16.10:** Her gennemgås først resten af kapitel 2.2 om *elementarmatricer* og invers matrix, side 123 125. Bemærk at vi vil få en meget dybere indsigt i, hvad der foregår under rækkeoperationer!

  Siden fortsættes med kapitel 2.8 og 2.9, hvor vi skal se på *underrum* af $\mathbb{R}^n$: Dette er en slags generalisering af linier og planer i $\mathbb{R}^3$. Som vi skal se kan underrum have forskellige *dimensioner*, og generelt kan dimensionen bestemmes ved at tælle antallet af vektorer i en *basis* for underrummet (en basis består af et system af vektorer, som både er lineært uafhængigt og som frembringer hele underrummet — repeter gerne disse to begreber fra det tidligere). Sjovt er der til hver matrix knyttet to særlige underrum kaldet *nulrummet* og *søjlerummet*, som man kan opskrive direkte ud fra matricens reducerede echelonform — mere om det senere.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

NB! Hængepartier om determinantformlen og matrixregneregler bør der rettes op på i opgaverne (især aht. teori nr.3)

Oversigt nr. 10

10. gang, tirsdag den 13. april.

- **12.30–12.50:** Lidt repetition fra sidste gang om matrixligninger og underrum.

- **12.50–14.50:** Vi regner følgende:

  Invertibilitet: Prøv efter at sætning 4 side 119 er korrekt. Dette skal gøres på *to* måder: Dels ved at se efter at den foreslåede inverse matrix gør hvad den skal i følge definitionen af invertibilitet. Dels ved at bruge sætning 7 side 123.

  Elementarmatricer: Find inverserne til E_1, E_2 og E_3 på side 122. Gør prøve ved at gange de fundne matricer E_j^{-1} på de oprindelige E_j.

  Underrum: Diskuter først opgave 2.8.1 i gruppen — fortsæt med 2.8.22. Regn så 2.8.5.

  Regneregler for matrixprodukter: Opgave 2.1.29–32 (som kunne indgå i teorispørgsmålet til prøveopgave 3 !).

  Matrixprodukter og -ligninger: Regn prøveopgave nr. 3, hvis du ikke nåede den sidst.

- **14.50–16.10:** Her gennemgås afsnit 2.8–2.9 om basis og koordinater. Desuden går vi igang med afsnit 3.1–3.2 om determinanter.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

11. gang, tirsdag den 20. april. Regn øvelsesopgaverne til afsnit 2.8–9 som forberedelse, og rund af med sandt/falskopgaverne 2.8.21.

- **12.30–12.50:** Her repeterer vi lidt om *underrum* af $\mathbb{R}^n$ og begrebet *basis* for sådanne, især ifm. lineære transformationers nulrum og søjlerum.
- **12.50–14.50:** Til træning i

  nulrum/søjlerum: Lav 2.8.11+13 (nemme) og 2.8.7.

  baser: 2.8.15+17+19+20.

  Koordinater: Begynd med 2.9.1+5 og fortsæt så med 2.9.7+8. Overvej om du/I derefter er blevet klogere på hvad I egentlig gjorde i 2.9.1+5.

  Basis+dimension: Regn opgave 2.9.11+15+13 (i den rækkefølge).

  Endelig illustreres de samme begreber gennem prøveopgave 4 (som ikke er svær når man først kender begreberne — regn derfor ovenstående først !).
- **14.50–16.10:** Vi gennemgår kapitel 3.1–2 om determinanter, som er et tal man kan regne ud for hver konkret $n \times n$-matrix (ofte kan man også her bruge rækkeoperationer..); tallet afgør om matricen er inverterbar eller ej.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Bemærk at vi sidste gang fik defineret *rangen* af en matrix $A_{m,n}$ som

$$\operatorname{rang} A = \text{antallet af pivotpositioner i } A. \tag{4}$$

Vi indså også at rangen af A kan bestemmes som

$$\operatorname{rang} A = \text{dimensionen af } A\text{'s søjlerum} = \dim \operatorname{Col} A. \tag{5}$$

Ligningssystemet $A \cdot x = b$, hvor $b \in \mathbb{R}^m$ er en given vektor, er derfor *konsistent* hvis og kun hvis

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b), \tag{6}$$

altså hvis og kun hvis koefficientmatricen A og den udvidede koefficientmatrix $(A\ \ b)$ har samme rang. (Argumentet for dette er at A og $(A\ \ b)$ har samme rang hvis og kun hvis den sidste søjle i $(A\ \ b)$ ikke er en pivotsøjle, og det var jo det kriterium for konsistens, som vi fandt tilbage i kursets begyndelse.)

12. gang, fredag den 23. april. Som forberedelse kan I regne sandt/falsk udfordringen i 2.9.17 og øvelsesopgaven til kapitel 3.1.

- **12.30–13.45:** Forelæsning over resten af kapitel 3.2.
- **13.45–16.10:** Til træning i de nye begreber:

Rang: Lav 2.9.24+19+25 (brug rangformlen i sætning 14).

Definitionen af determinant: Regn 3.1.1–2.

Udvikling: 3.1.12+13.

3×3**-reglen:** 3.1.15–16 (denne regel er ikke gennemgået, men den kan være bekvem for jer at lære nu).

En faldgrube: Undgå den ved at regne 3.1.37+38 !!

Rækkeoperationer: Lav først 3.2.1–4 som repetition (nemme!). Regn så 3.2.10.

Inverterbarhed: 3.2.21+23.

Produktreglen: 3.2.37+39.

Determinanter er også temaet i prøveopgave nr. 5.

Endelig ser vi også på prøveopgave nr. 6, som er relevant at inddage nu fordi dens teorispørgsmål vedrører inverterbare matricer (de er jo et hovedtema for determinanterne).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

13. gang, tirsdag den 27. april. Som forberedelse bedes I læse afsnit 3.1–3.2 og regne de tilhørende øvelsesopgaver. Desuden sandt/falsk 3.1.39.

Desuden bør I repetere om elementarmatricer fra afsnit 2.2 (side 122), og at rækkeoperationer kan udføres ved at gange med elementarmatricer.

- **12.30–12.50:** Vi repeterer først noget om determinanter og sætter især fokus på formlen $\det(AB) = \det A \det B$ (den har en sjov konsekvens for inverterbarheden af A).

- **12.50–14.50:** Temaet her er jeres fortrolighed med at regne med determinanter:

  Lineær afhængighed Regn 3.2.25 og 3.2.30 (foruden vinket kan man også tænke over at ens rækker/søjler giver lineær afhængighed).

  Linearitet Regn 3.2.43 og mind jer selv og hinanden om at *determinanten er lineær i hver række og søjle for sig*; jævnfør bogens side 197.

  Desuden regner vi de resterende opgaver fra sidste gang.

- **14.50–16.10:** Her gør vi kapitel 3 om determinanter færdigt, hovedsigtet er beviserne for sætningerne 4 og 6.

  Dernæst tager vi hul på emnerne *egenværdier* og *egenvektorer*. Disse begreber spiller en fundamental rolle i næsten al matematik og næsten alle anvendelser deraf (i samme størrelsesorden som integral- og differentiallregning). Som eksempler kan nævnes analyse af computerberegningers pålidelighed (f.eks. GPS-systemet) eller dimensionering af bygninger og broer (det ville være mere end almindeligt ærgerligt om Storebæltsbroen skulle bygges om. . .). Vi når antageligt kapitel 3.1 og 3.2 frem til side 314.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Vi fik sidste gang indført *egenværdierne* for en given $n \times n$-matrix som de reelle tal λ for hvilke ligningen

$$Ax = \lambda x \tag{7}$$

har løsninger $x \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$; disse x udgør egenvektorerne hørende til egenværdien λ, mens *egenrummet* E_λ udgøres af alle ligningens løsninger (dvs. $x = 0$ er tilføjet).

Der er her to hovedresultater:

$$\lambda \text{ er en egenværdi for } A \implies \det(A - \lambda I) = 0, \tag{8}$$

så egenværdierne skal søges blandt rødderne i det *karakteristiske polynomium* for A, som er $p_A(z) = \det(A - zI)$. Når først egenværdierne er bestemt, har man

$$x \text{ er en egenvektor for } A \text{ hørende til } \lambda \iff x \neq 0 \text{ og } x \in \operatorname{Nul}(A - \lambda I). \tag{9}$$

Sidste betingelse betyder, at x løser det homogene ligningssystem $(A - \lambda I)x = 0$.

14. gang, tirsdag den 4. maj.

- **12.30–12.50:** Perspektivering om determinanter: Dels skal vi se hvorfor determinanter indgår i (8) ovenfor, dels skal vi se hvordan $Ax = b$ kan løses vha. determinanter (Cramérs regel, kap. 3.3). Begge dele bunder i kriterierne for inverterbare matricer, med en bestemt tankegang, I bør præsenteres for.

- **12.50–14.50:** Der er mange opgaver, men nogle er ret nemme !

  Ligninger 3.3.5+9 (især den sidste viser at determinantformlen kan være nyttig (en sådan parameter s optræder tit i elektronik)).

  Egenværdier Træn begreberne ved at regne 5.1.5+7.

  Egenrum Lav 5.1.9+15.

  Find samtlige egenværdier og -vektorer for matricen A i bogens eksempel 4 i kapitel 5.1.

  Karakteristisk polynomium Regn 5.2.5+9+17. Lav også 5.1.23 (nem).

  Diskuter i gruppen, hvordan man kan lave et andet argument for sætning 1 side 306. (*Vink:* Hvad er determinanten af en øvre trekantsmatrix ?)

  Endelig kan I lave gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **14.50–16.10:** Her vil jeg gennemgå mere om egenværdier og egenvektorer, med hovedvægten på anvendelser og eksempler fra kapitel 5.1–5.2.

15. gang, tirsdag den 11. maj. [Dette opdateres senere, efter 14. seance.]

- **12.30–13.50** Her vil jeg først gennemgå kapitel 5.3 om *diagonalisering* af matricer. Løst sagt forklarer denne teknik, hvilken nytte man (i bedste fald) kan have af at kende en matrix' egenværdier mm. Dette vil være højdepunktet på mat2a !

- **14.00–16.10** Her vil vi lave opgaver i det gennemgåede. Desuden vil vi se på prøveopgave nr. 7, som omhandler diagonalisering, og på prøveopgave nr. A, som dels er relevant for begge jeres studieretninger, dels ligger tæt op ad de gennemgåede eksempler.

Bemærk, at pensum til mat2a foreligger på nettet.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

Vi sluttede af sidste gang med at gennemgå eksempel 5 i kapitel 5.2, om et dynamisk system modelleret ved en differensligning af formen $x_{k+1} = Ax_k$. Vi fik faktisk analyseret opførslen for $k \to \infty$, og fik fastlagt systemets *kvalitative* opførsel.

For denne analyse var det i ekseplet helt afgørende, at vi kunne bestemme en basis for $\mathbb{R}^2$ bestående af egenvektorer for A. Motiveret af dette eksempel, runder vi derfor kurset af med at studere, hvornår man til en matrix $A_{n,n}$ kan finde en basis for $\mathbb{R}^n$ af egenvektorer for A.

15. gang, tirsdag den 11. maj.

- **12.30–13.50** Her vil jeg gennemgå kapitel 5.3 om *diagonalisering* af matricer. Denne teknik forklarer, hvilken nytte man kan have af at kende en matrix' egenværdier og -vektorer.

  Mere præcist kaldes matricen $A_{n,n}$ *diagonaliserbar*, dersom $\mathbb{R}^n$ har en basis bestående af egenvektorer for A. Herom er der to vigtige resultater:

  – **Hvis** A er diagonaliserbar, så gælder at $A = PDP^{-1}$, hvor
    * D er en diagonalmatrix med A's *egenværdier* i diagonalen, dvs. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
    * P er en inverterbar matrix med A's *egenvektorer* som søjler, dvs. $P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$, hvor $Av_j = \lambda_j v_j$.

    NB ! Hverken D eller P kommer ud af den blå luft her !

  – A **ER** diagonaliserbar, dersom enten
    * A har n forskellige egenværdier, eller
    * $A^T = A$ (kaldet "spektralsætningen for reelle matricer").

  At ligningen $A = PDP^{-1}$ gælder, omtales som at A og D er *similære*.

- **14.00–16.10** Her vil vi lave opgaver i det gennemgåede:

  Potenser af matricer: Regn 5.3.1+4.

  Similaritet med diagonalmatrix: Lav 5.3.5+6. (Nemme, men viser hvad sagen drejer sig om.)

  Simple diagonaliseringer: Regn 5.3.7+17 (overkommelige!).

  Desuden vil vi se på prøveopgave nr. 7, som direkte omhandler diagonalisering, og på prøveopgave nr. A, som ligger tæt op ad de gennemgåede eksempler om nytten af diagonalisering.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I Matematisk regne- og fremlæggelsesteknik 2 (MR2) tages udgangspunkt i studieordningens ord om:

Indhold: Ræsonnering og problemløsning med lineær algebra.

Formål: At udvikle de studerendes problemløsningsfærdigheder gennem eksempler hentet fra den lineære algebra samt at formidle løsninger skriftligt og mundtligt.

Som eksempler vil jeg foreslå, at vi bruger prøveopgaverne 1–6 og A–B !

Til den skriftlige formidling kan vi nøjes med at lade jer aflevere en besvarelse af en af disse opgaver (dette vil så også tjene til godkendelse af MR2). Ellers udnytter vi tiden til at træne jer i *problemløsning, ræsonnering og mundtlig fremstilling* efter følgende program:

Fredag 4. juni Prøveopg. 7+A om formiddagen, nr. 5+6 efter middag.

Mandag 7. juni Prøveopg. 3+4 om formiddagen, nr. 1+2 efter middag.

Tirsdag 8. juni Afklaring af de sidste spørgsmål i alle opgaverne og udarbejdelse af en skriftlig besvarelse pér gruppe af en udvalgt opgave (som meddeles senere).

Dagsprogrammerne for fredag og mandag bliver nogenlunde således:

- **8.15-8.45:** Oplæg fra mig i auditorium 2 om teoridelen af prøveopgaverne.
- **8.45–12.00:** I grupperummene arbejder I med de eksempler/prøveopgaver, der er på dagsordnen. I må dels afklare de restende spørgsmål om *regning* af opgaven, **dels** diskutere *teorispørgsmålet* i fællesskab.

  Fuldt udbytte af tiden får I kun, hvis I når både at diskutere *hvorvidt* og *hvordan* teori- og regnedelen kan sammenkædes, og at fremlægge, ved tavlen, om teoridelen for hinanden.
- **12.30–15.30:** I fortsætter med de næste to eksempler iht. skemaet ovenfor. (Samme fremgangsmåde som om formiddagen. . .)
- **15.30–16.00:** Afrunding i auditorium 2 af fælles problemer med emnerne (kan aflyses hvis der ej er behov).

Onsdag 8. juni mødes vi i auditorium 2 klokken 8.15.

NB ! NB !! Det er vigtigt for jeres præsentationer at kæde teorien og praktikken sammen. Dels for at spare tid, dels for at vise et godt overblik over sagerne. Diskuter i grupperne om det er tiden eller overblikket, der er vigtigst for at fremlæggelsen gør sig godt !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen