Oversigt nr. 1

I kurset i skal vi bruge D. C. Lay:"Linear algebra and its applications", 3. udgave Addison–Wesley 2003; i store træk bliver det kapitel 1–3 og 5.1–5.3.

Som regel vil hver seance omhandle circa et/to afsnit i bogen.

Bemærk at kurset ekstraordinært begynder på en **torsdag !**

1.gang, torsdag den 3. februar 2005.

Vi er her i auditorium 4 **kl. 12.30–13.50:**, hvor jeg efter en introduktion til kurset vil forelæse over "lineære ligninger" (afsnit 1.1) og temaet bliver *hvad, hvorfor og hvordan*. Det vil sige, hvad er lineære ligninger, hvorfor er det nyttigt at beskæftige sig med dem (eksempler vil blive givet), og hvordan løser man dem.

Som I vil få at se er der en meget systematisk og overskuelig måde at løse lineære ligninger på, også selvom der skulle ske at være 5 ligninger og 6 ubekendte. Selve løsningsmetoden vil vi bruge en del kræfter på både at indøve og forstå, for den bliver central for os i hele kurset. Om kort tid vil det derfor være en overkommelig opgave for jer at løse 7 ligninger med 7 ubekendte (tro det om I kan..). I kan læse om det i afsnit 1.1. Vi når nok også lidt af afsnit 1.2.

Kl. 14.00–16.15 Her mødes vi i grupperrummene til en nærmere snak om bogen og kurset sammen med hjælpelærerne. For at få en blid start, og for at stifte nærmere bekendtskab med bogen (og især de store anstrengelser Lay gør sig for at I kan få et godt udbytte), laver vi følgende opgaver:

- "Practice problems 1–4" side 10. Disse kan løses på grundlag af forelæsningen alene (men er ment som *træningsopgaver* efter man har læst afsnittet — I opfordres hermed til at løse træningsopgaverne hver gang et afsnit er læst/gennemgået).

- **Sandt/falsk-opgave**: Diskuter opgave 23 side 12 i gruppen, men husk at *begrunde* jeres svar, som teksten før opgave 23 kræver !

- **AHA-opgaven**: Løs ligningssystemet i eksempel 1 side 5 på følgende måde: Først isoleres x_1 i 1. ligning og substitueres i 3. ligning. Dernæst isoleres x_2 i 2. ligning og indsættes i den nye 3. ligning (men ej i nr. 1). Derved er x_3 blevet bestemt; der bør jævnføres med midten af side 6 i bogen. Resultatet substitueres i ligning 1 og 2. Fortsæt indtil også x_1 og x_2 er bestemt.

  Ved at sammenligne med bogens gennemgang skulle to ting nu gerne stå klart: **Dels** optræder alle mellemfacitter i substitutionsmetoden også ved at bruge bogens metode (de to metoder er altså to sider af den samme sag), **dels** er bogens fremgangsmåde langt mere overskuelig.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Fra latinskolen: Det hedder en matrix, matricen og flere matricer. (Og selv når man så har bøjet dem, så kan det aldrig blive til en “matrice” i ental.)

2. gang, tirsdag den 8. februar.

- **12.30–12.50:** Lidt repetition og perspektivering.
- **12.50–14.50:** Vi begynder med **Sandt/falsk**-opgaven 1.1.24; diskuter den i grupperne. Dernæst går vi videre med

  Rækkeoperationer: For at træne dette laves 1.1.3+5–7+11+13+17-18. NB ! Gå systematisk til værks !

  Konsistens: Regn 1.1.15–18. Hvad vil Lay opnå med ordren “do not completely solve the systems.” ??

  Anvendelser: Lav 1.1.33+34.
- **14.55–16.15:** Her gennemgås afsnit 1.1.2 om hvad rækkeoperationer i almindelighed kan føre til (man kan ikke altid opnå et-taller i diagonalen); vi indfører i den forbindelse en standardform kaldet en *echelonmatrix*.

  Desuden kapitel 1.3 om vektorer. Læs hjemmefra det velkendte om $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, så vi fælles kan se på det nye i $\mathbb{R}^n$ — det skal vi bruge til ligningssystemer med uendeligt mange løsninger.

3. gang, NB ! **den 11. februar.** Regn øvelsesopgaverne (‘practice problems’ side 24 og side 37) samt sandt/falsk-opgaverne 1.2.21 og 1.3.23 hjemmefra.

- **12.30–12.50:** Repetition fra afsnit 1.2 og 1.3 i Lays bog.
- **12.50–14.45:** Opgaveregning i følgende (de er mange, men ej tekniske):

  Diskussion: Lav i fællesskab 1.1.29–32, og fortsæt med 1.2.22.

  Echelonform: Regn 1.2.2.

  Konsistens: 1.2.15+16.

  Parametriserede løsningsmængder: Lav 1.2.9+11+12+13.

  Interpolation: Dette er en almindeligt brugt videnskabelig metode, I givetvis vil møde senere; her giver den lidt træning i lineære ligninger via: opgave 1.2.33. Fortsæt gerne med 1.2.34.

  Linear kombinationer: 1.3.11.

  Frembringelse: 1.3.18. Og opgave 1.3.25 er rigtig god !!
- **14.50–16.10:** Her gennemgås kapitel 1.4 og 1.5 i Lays bog.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

4. gang, tirsdag den 15. februar. Som forberedelse bedes I læse afsnit 1.4+1.5 og regne de tilhørende 'praktikproblemer' og 1.4+5.23.

- **12.30–12.50:** Perspektivering og repetition (med fokus på Theorem 4) .
- **12.50–14.40:** Opgaveregningens menukort af lettere anretninger (begrebstræning snarere end regnetræning):

  Vektorer i $\mathbb{R}^n$ 1.3.7+9. Diskuter i gruppen !

  Sandt/falsk ? 1.3.24. Diskuter i gruppen !

  Regneregler 1.3.33.

  Frembringelse 1.3.18+25, hvis I ikke nåede dem sidste gang.

  Matrixprodukt 1.4.1–4.

  Matrixligning 1.4.9+10, 1.4.17–20.

  Konsistens *uden* rækkeoperationer: 1.4.31+32.

  Homogene systemer 1.5.9+11. Lav også 1.5.25 !

- **14.50–16.10:** Vi vil her først se lidt på eksemplerne i afsnit 1.6, som illustrerer hvordan man i mange praktiske situationer kan få brug for at løse (eller bare håndtere) lineære ligningssystemer.

  Dernæst forsætter vi med *lineær uafhængighed* i afsnit 1.7; dette begreb bliver meget centralt i kurset.

5. gang, tirsdag den 1. marts. Som forberedelse til denne seance bør I repetere begreberne injektive og surjektive afbildninger (gennemgået i starten af mat1a, se teksten på ugesedlerne). Desuden bør I læse afsnit 1.6+7 og lave opgaverne side 70 og 1.7.21. (NB ! Opgaverne illustrerer mange mulige fejlslutninger i forbindelse med lineær uafhængighed.)

- **12.30–12.50:** Lidt repetition og perspektivering.
- **12.50–14.50:** Til opgaveregningen:

  Inhomogene sys. 1.5.29–32. Diskuter vha. Sætning 1.5.4 !

  Sandt/falsk 1.7.22.

Lineær (u)afhængighed 1.7.1–4 som simpel træning; de kan diskuteres i gruppen. Dernæst 1.7.5+7.

Regn så 1.7.9, og overvej hvorfor (a) og (b) ikke kommer ud på det samme!

God forståelse (som ofte kan spare mange regninger!) kan fås af opgave 1.7.31–32.

Endelig er der 1.7.33–40. (De er små og sjove...)

Den "samfundsvidenskabelige" 1.6.14 (som også er sjov..).

- **14.50–16.10:** Her gennemgår vi kapitel 1.8-1.9.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

6. gang, tirsdag den 8. marts. Som forberedelse til dagens seance bedes man læse afsnittene 1.8 og 1.9 om lineære transformationer (vi kommer dog til at vende tilbage til sætningerne 11 og 12, som ikke er helt gennemgåede endnu). Dernæst regnes som sædvanlig øvelserne, her side 79+90, og sandt/falsk opgaverne 1.8.21 og 1.9.23.

- **12.30–12.50:** Vi repeterer lidt om lineære transformationer i kapitel 1.8–9, og færdiggør gennemgangen af sætning 1.9 (det meste har vi tidligere indset).

- **12.50–14.50:** Som opgaver i det nye stof ses på en bunke opgaver (mange er ganske ligetil):

  Sandt/falsk: 1.9.24 diskuteres i gruppen.

  Linearitet: Regn opgaverne 1.8.29+30+32+33+36.

  Standardmatricer: Lav opgave 1.9.17-20.

  Forbindelsen til pivotsøjler: Regn opgaverne 1.9.31+32.

  Forbindelsen mellem $k \times n$ og injektiv/surjektiv: Regn 1.9.35.

  Linearitet ved sammensætning: Bevis følgende sætning:

  > Når $S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ og $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ begge er lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $T \circ S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ lineær.
  >
  > *Vink:* se opgave 1.9.36.

- **14.50–16.10:** Vi vil her først se lidt på eksemplerne i afsnit 1.10. Her vil fokus være hvorledes lineære transformationer kan bruges til at løse nye typer af opgaver (eller lave matematiske modeller for nye problemsstillinger).

  Desuden gennemgås afsnit 2.1 om regneregler for matricer. Som vi skal se er det ganske ligetil at danne summen $A + B$ af to matricer af samme størrelse, og at multiplicere dem med et tal, tA. Derimod er det mere kompliceret at multiplicere to matricer $A \cdot C$, men dette viser sig vigtigt i mange sammenhænge.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

7. gang, tirsdag den 15. marts. Denne gang vil vi sætte tid af til at se på prøveopgaverne 1, 2 og 3. Vi har derfor et atypisk program som følger:

- **12.30–13.50:** Her vil vi fortsætte gennemgangen af kapitel 2.1 om *matrixregning*. Vi skal dels runde af om matrixproduktet fra sidste gang, dels gennemgå nye ting som *transponering* af matricer; dette kan f. eks. være nyttigt i prøveopgave 2, forklaring følger.
- **14.00–16.10:** Her regnes prøveopgaverne 1, 2 og 3. **NB !** I bør prøve at regne opgaverne så vidt muligt *hjemmefra*, dels for at teste jeres udbytte af kurset hidtil, dels for udnytte hjælpelærernes assistance bedst muligt.

Som I kan se har prøveopgaverne i dette semester et langt større element af matematikkens anvendelser med. De interesserede kan læse om differensligninger, som disse optræder i prøveopgave 3, i bogens kapitel 4.8.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

8. gang, tirsdag den 22. marts. Regn som forberedelse øvelsesopgaverne side 116 og 2.1.15.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering om matrixregning.
- **12.50–14.50:** I grupperne kan I regne:

  Matrixregning: Opgave 2.1.1+2.

  Matrixprodukt: 2.1.5+7+13.

  Abnormiteter: 2.1.9.

  Anvendelser: Opgaverne 1.10.11+7 (søg evt. inspiration side 95).

  Linearitet: Lav 1.9.17+20.

  Injektivitet: Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$ og betragt den lineære afbildning givet ved $x \mapsto A \cdot x$, Er denne injektiv ? Bestem også A's nulrum, dvs. $\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot x = 0 \,\}$.
  Er afbildningen surjektiv ?

  Derudover kan I regne gamle opgaver og prøveopgaver.

- **14.50–16.10:** Vi gennemgår afsnit 2.2 og 2.3 om *inversen* A^{-1} til en matrix A: Dels skal vi se på hvad dette begreb overhovedet er (groft sagt er det A's reciprokke matrix); dels skal vi se hvordan man finder A^{-1} i praksis, når A^{-1} eksisterer.

9. gang, tirsdag den 29. marts.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering om inverterbare matricer.
- **12.50–14.50:** De følgende opgaver er mange, men de fleste er helt ligetil, så de skulle kunne nås.

  Abnormiteter: 2.1.10+12.

  Injektiv: 2.1.23.

  Regneregler for matrixprodukter: Opgave 2.1.29–32.

  Invers matrix: 2.2.1+5+7.

  Matrixligninger: 2.2.8+11+13.

  Er der tid til overs kan I evt. se på prøveopgaverne igen.

- **14.50–16.10:** Her gennemgås evt. først resten af kapitel 2.2 om *elementar-matricer* og invers matrix, side 123 125.

  Siden fortsættes med kapitel 2.8 og 2.9, hvor vi skal se på *underrum* af $\mathbb{R}^n$: Dette er en slags generalisering af linier og planer i $\mathbb{R}^3$. Som vi skal se kan underrum have forskellige *dimensioner*, og generelt kan dimensionen bestemmes ved at tælle antallet af vektorer i en *basis* for underrummet (en basis består af et system af vektorer, som både er lineært uafhængigt og som frembringer hele underrummet — repeter gerne disse to begreber fra det tidligere). Til enhver matrix er der knyttet to særlige underrum kaldet *nulrummet* og *søjlerummet*, som man kan opskrive direkte ud fra matricens reducerede echelonform — mere om det senere.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

10. gang, tirsdag den 5. april.

- **12.30–12.50:** Lidt repetition fra sidste gang om underrum, basis, nulrum osv.

- **12.50–14.50:** Vi regner følgende:

  Invertibilitet: Prøv efter at sætning 4 side 119 er korrekt. Dette skal gøres på *to* måder: Dels ved at se efter at den foreslåede inverse matrix gør hvad den skal i følge definitionen af invertibilitet. Dels ved at bruge sætning 7 side 123.

  Elementarmatricer: Find inverserne til E_1, E_2 og E_3 på side 122 — brug Sætning 7 og hovedregning ! Gør prøve ved at gange de fundne matricer E_j^{-1} på de oprindelige E_j.

  Underrum: Diskuter først opgave 2.8.1 i gruppen — fortsæt med 2.8.22. Regn så 2.8.5.

  nulrum/søjlerum: Lav 2.8.11+13 (nemme) og 2.8.7.

  baser: 2.8.15+17+19+20.

- **14.50–16.10:** Her gennemgås resten af afsnit 2.8–2.9 om basis og koordinater, især i forbindelse med søjlerummet for en matrix. Desuden går vi igang med afsnit 3.1–3.2 om determinanter.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Sidste gang fik vi defineret *rangen* af en matrix $A_{m,n}$ som

$$\operatorname{rang} A = \text{antallet af pivotpositioner i } A. \tag{1}$$

Som vi så har $\operatorname{Col}(A)$ en basis bestående af pivotsøjlerne i A, og vi fik derfor det resultat at

$$\operatorname{rang} A = \text{dimensionen af } A\text{'s søjlerum} = \dim \operatorname{Col} A. \tag{2}$$

Ligningssystemet $Ax = b$, hvor $b \in \mathbb{R}^m$ er en given vektor, er derfor *konsistent* hvis og kun hvis

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b), \tag{3}$$

altså hvis og kun hvis koefficientmatricen A og den udvidede koefficientmatrix $(A\ \ b)$ har samme rang. (Argumentet for dette er at A og $(A\ \ b)$ har samme rang hvis og kun hvis den sidste søjle i $(A\ \ b)$ ikke er en pivotsøjle, og det var jo det kriterium for konsistens, som vi fandt tilbage i kursets begyndelse.)

11. gang, tirsdag den 12. april. Denne gang vil det være et hovedformål at I får regnet prøveopgaverne 4–6. Men i forbindelse med nr. 5 har I brug for at vide noget om determinanter, så programmet bliver:

- **12.30–13.50:** Vi gennemgår dele af kapitel 3.1–2 om determinanter.
- **13.50–16.10:** I regner prøveopgaverne 4–6.

NB ! NB !! NB !!! Det vil være spild af hjælpelærernes, min og navnlig jeres tid, hvis I ikke så vidt muligt har regnet opgaverne hjemmefra.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

12. gang, tirsdag den 19. april. Som forberedelse kan I repetere om elementarmatricer og regne øvelsesopgaven til kapitel 3.1.

- **12.30–13.00:** Forelæsning over resten af kapitel 3.2.
- **13.00–14.50:** Til træning i de nye begreber:

  Rang: Lav 2.9.24+19+23 (brug rangformlen i sætning 14).

  Definitionen af determinant: Regn 3.1.1.

  Udvikling: 3.1.12+13.

  3×3**-reglen:** 3.1.15–16 (denne regel er ikke gennemgået, men den kan være bekvem for jer at lære nu).

  En faldgrube: Undgå den ved at regne 3.1.37+38 !!

  Rækkeoperationer: Lav først 3.2.1–4 som repetition (nemme!). Regn så 3.2.10.

  Inverterbarhed: 3.2.21+23.

  Produktreglen: 3.2.37+39.

- **14.50–16.10** Vi gennemgår kapitel 5.1–2 om *egenværdier* og *egenvektorer*.

  Det bliver (som vi skal se senere) en hovedpointe med hele kurset, at disse begreber ofte er ret afgørende for at forstå hvorledes et dynamisk system udvikler sig som tiden går.

  Blandt andre eksempler på deres anvendelser kan nævnes analyse af computerberegningers pålidelighed (f.eks. GPS-systemet) eller dimensionering af bygninger og broer (det ville være mere end almindeligt ærgerligt om Storebæltsbroen skulle bygges om. . .).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Vi fik sidste gang indført *egenværdierne* for en given $n \times n$-matrix som de reelle tal λ for hvilke ligningen

$$Ax = \lambda x \tag{4}$$

har løsninger $x \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$; disse x udgør egenvektorerne hørende til egenværdien λ, mens *egenrummet* E_λ udgøres af alle ligningens løsninger (dvs. $x = 0$ er tilføjet).

Der er her to hovedresultater:

$$\lambda \text{ er en egenværdi for } A \implies \det(A - \lambda I) = 0, \tag{5}$$

så egenværdierne skal søges blandt rødderne i det *karakteristiske polynomium* for A, som er $p_A(z) = \det(A - zI)$. Når først egenværdierne er bestemt, har man

$$x \text{ er en egenvektor for } A \text{ hørende til } \lambda \iff x \neq 0 \text{ og } x \in \operatorname{Nul}(A - \lambda I). \tag{6}$$

Sidste betingelse betyder, at x løser det homogene ligningssystem $(A - \lambda I)x = 0$.

13. gang, mandag den 25. april.

- **8.15–8.35:** Som afrunding af determinanter vil vi gennemgå hvordan $Ax = b$ kan løses vha. determinanter (Cramérs regel, kap. 3.3). Og lidt repetition om egenværdier og -vektorer.

- **8.40–10.40:** Der er mange opgaver, men nogle er ret nemme !

  Ligninger: 3.3.5+9 — især den sidste belyser at determinantformlen kan være nyttig (en sådan parameter s optræder tit i elektronik).

  Egenværdier: Træn begreberne ved at regne 5.1.5+7.

  Egenrum: Lav 5.1.9+15.

  Find dernæst samtlige egenværdier og -vektorer for matricen A i bogens eksempel 4 i kapitel 5.1.

  Karakteristisk polynomium: Regn 5.2.5+9+17. Lav også 5.1.23 (nem).

  Diskuter i gruppen, hvordan man kan lave et andet argument for sætning 1 side 306. (*Vink:* Hvad er determinanten af en øvre trekantsmatrix ?)

  Endelig kan I lave gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **10.40–12.00:** Her vil jeg gennemgå mere om egenværdier og egenvektorer fra omkring side 314; vi når et stykke ind i kapitel 3.2, hvor vi skal se på hvornår en lineær afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan beskrives ved en diagonalmatrix (— det ville jo ærlig talt være en del nemmere end at have en vilkårlig matrix —) og her viser det sig at egenværdier og egenvektorer spiller en afgørende rolle.

14. gang, tirsdag den 26. april. Dette bliver nok den sidste seance med gennemgang af nyt stof. Vi får derfor en atypisk tidsplan begyndende med forelæsning.

- **12.30–13.50** Her gennemgås resten af kapitel 5.3 om *diagonalisering* af matricer/lineære afbildninger. Denne teknik udnytter at man kan bestemme en matrix' egenværdier og -vektorer.

  Mere præcist kaldes matricen $A_{n,n}$ *diagonaliserbar*, dersom $\mathbb{R}^n$ har en basis bestående af egenvektorer for A. Herom er der to vigtige resultater:

  - **Hvis** A er diagonaliserbar, så gælder at $A = PDP^{-1}$, hvor
    - D er en diagonalmatrix med A's *egenværdier* i diagonalen, dvs. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
    - P er en inverterbar matrix med A's *egenvektorer* som søjler, dvs. $P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$, hvor $Av_j = \lambda_j v_j$.

    (NB ! Hverken D eller P kommer ud af den blå luft her !)
  - A **ER** diagonaliserbar, dersom enten
    - A har n forskellige egenværdier, eller
    - $A^T = A$ (denne betingelse kaldes “spektralsætningen for reelle matricer”).

  At ligningen $A = PDP^{-1}$ gælder, omtales som at A og D er *similære*.

- **14.00–16.10** Her vil vi lave opgaver i det gennemgåede:

  Potenser af matricer: Regn 5.3.1+4.

  Similaritet med diagonalmatrix: Lav 5.3.5+6. (Nemme, men viser hvad sagen drejer sig om.)

  Simple diagonaliseringer: Regn 5.3.7+17+19 (overkommelige!).

  Åbne opgaver: Regn 5.3.21+23.

  Afgør dernæst om $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar. Er svaret overraskende ?

15. gang, mandag den 2. maj. Vi samles først i auditoriet klokken 8.15, inden vi ser på de resterende prøveopgaver.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I Matematisk regne- og fremlæggelsesteknik 2 (MR2) tages udgangspunkt i prøveopgaverne 1–7 og A–B. Disse findes på nettet.

Vi udnytter tiden til at træne jer i *problemløsning, ræsonnering og mundtlig fremstilling* efter følgende program:

Fredag 3. juni Prøveopg. 1+2+3 før middag, dernæst nr. 3+4+6.

Mandag 6. juni Prøveopg. 7+A før middag, dernæst nr. 5+B.

Tirsdag 7. juni Afklaring af de sidste spørgsmål i alle opgaverne.

Dagsprogrammerne for fredag, mandag og tirsdag bliver nogenlunde således:

- **8.15-8.45:** Samling i auditorium 4 til oplæg og/eller almen information.
- **8.45–12.00:** I grupperummene arbejder I med de prøveopgaver, der er på dagsordnen.

  Fuldt udbytte af tiden får I kun, hvis I når at diskutere *hvad* der skal/kan medtages under de teoretiske delspørgsmål.
- **12.30–15.30:** I fortsætter med de næste to eksempler iht. skemaet ovenfor.
- **15.30–16.00:** Afrunding i auditorium 4 af fælles problemer med emnerne (kan aflyses hvis der ej er behov).

Obs ! Det er vigtigt for jeres præsentationer at kæde teorien og praktikken sammen. Dels for at spare tid, dels for at vise et godt overblik over sagerne.

Notabene ! Hjælpelærerne står til rådighed i tidsrummet 10–14 (tirsdag 10–12). Brug dem mens de er der !!

Med venlig hilsen
Jon Johnsen