Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[BM] Mål- og integralteori, af Christain Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Jeg regner med at vi gennemgår bogen i sin helhed, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold.

Bogen giver en lettilgængelig indføring i et omfattende område af den moderne matematik, nemlig integrationsteorien. Men det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mægde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen af Lebesgues integralbegreb at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \dots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er virker dette både naturligt og bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke er en delmængde af hverken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^d$).

På den anden side er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vi vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er det en større konstruktion, som i praksis er meget *slagkraftig*. Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har været afgørende for dette integralbegreb, som I altså nu skal møde. Men mere om anvendelserne senere.

Første gang er i morgen onsdag den 2. februar. Vi mødes 8.15 i aud. G5-109, hvor jeg lægger ud med at gennemgå til og med kapitel 1 i [BM]. Siden får I tid til at regne opgaverne til kapitel 0; næste gang ser vi på dem til kapitel 1.

Jeg har lagt kopier af relevante dele af bogen i jeres postrum, for den er desværre ikke kommet i bogladen endnu.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

2. gang, onsdag den 9. februar. Her lægger vi ud med opgaveregning frem til kl. 10.

Da jeg ikke nåede hele kapitel 1 idag, så begynder I med følgende (helst hjemmefra):

- Som træning i de nye begreber indses/bevises, at *hvis* $\mathbb{E}_i$ *er en* σ*-algebra i en mængde* X *for hvert* $i \in I$*, da er også* $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ *en* σ*-algebra i* X.
- Dernæst vises Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  Noter at $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$; og at $\mathbb{D}$ kaldes et *frembringersystem* for denne algebra.

Så skulle I være klar til at regne opgaverne til kapitel 1.

Vedr. opgave 1.6, så skal man nok bruge at metrikken

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \tag{2}$$

giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Er der tid til overs regnes opgaver fra kapitel 0.

Kl. 10.15 fortsættes med gennemgang af kapitel 1+2.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Igår fik vi gennemgået kapitel 1 og 2, dog pånær afsnit 2.4 om delrum.

3. gang, onsdag den 17. februar. Her varmer I op med at vise at der, for en vilkårlig afbildning $f\colon X \to Y$ og delmængder af Y, gælder

$$f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j), \qquad f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j). \tag{3}$$

Gælder noget tilsvarende for billeder i stedet for urbilleder ?

Afklar hvorvidt polynomier $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\exp$ samt $\sin$ er *målelige*, dvs. Borel-funktioner. Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin konvergenscirkel, målelig ?

Dernæst kan I regne opgaverne 2.1, 2.2a-b, 2.3-2.5. Endelig gamle opgaver, især 1.6.

Fra 10.15 gennemgås resten af kapitel 2 og kapitel 3; måske når vi at berøre lidt af kapitel 4 om det nye integralbegreb.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi fik sidste gang gennemgået det meste af kapitel 3 om *mål*. Dog blev der ikke sagt meget om nulmængder og "næsten overalt", men dette vil jeg gå ud fra at I kan læse selv.

Bemærk dog at at en mængde $N \subset X$ kaldes en nulmængde blot den er indeholdt i en mængde med mål nul, altså blot $N \subset E$ for et $E \subset \mathbb{E}$ opfyldende $\mu(E) = 0$. Mængden N selv behøver således ikke at være med i σ-algebraen og dermed (paradoksalt nok) ikke at være målelig.

Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet til for at holde regnskab med at ting "går galt" i kun "ubetydelige" mængder.

Det anbefales at gruble hjemmefra over eksempel 2.15. Resultatet herfra indgår i den følgende teori, og metoden bruges også i den første opgave.

4. gang, onsdag den 9. marts 2005. Som sædvanlig lægger vi ud med opgaver, denne gang i

målelighed: Opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Man kan søge inspiration i eksempel 2.15 og sætning 0.1)

mål: opgave 3.3+6+7.

aksiomerne: belyses gennem opgaverne 3.4+5+10.

næsten overalt: opgave 3.12+13+14.

fuldstændige mål: Bliver senere et hovedtema, så lav gerne opgave 3.15 nu.

Fra 10.15 fortsættes med gennemgang af kapitel 4. Vi stiler mod at nå side 4.11.

5. gang er målet at gøre kapitel 4 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

5. gang, onsdag den 16. marts. Vi lægger ud med opgaver i

fuldstændige mål: Gennemsku opgave 3.16 !

Lebesgueintegralet: Regn opgave 4.1 om Dirichlét funktionen. *Vink:* Brug definitionen til at vise den er punkntvis grænse for en følge af positive funktioner med integral 0.

faldgruber: Opgave 4.3.

monotonisætningen: Regn 4.4.

almen træning: 4.6–9.

modeksempler: Lav opave 4.11 og 4.12.

Fra klokken 10.15 fortsætter vi med resten af kapitel 4 (visse dele er ret ligetil).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

6. gang, onsdag den 23. marts. Vi lægger ud med opgaverne 4.14+19+23+28+29+30+38+39+41. Afhængigt af interesser kunne det være en ide at begynde med 4.41; den kan være typisk for matematisk analyse.

Klokken 10.15 gennemgås billedmål fra kapitel 4. Siden fortsættes med kapitel 5.1–3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 5.3–4 og set på opgaverne 4.35, 4.42 og 5.6-5.10.

I forbindelse med sætning 5.17 om at Lebesguemålet er invariant under enhver isometri φ, fik jeg givet en ad hoc begrundelse for at billedmålet $\varphi(m_k)$ overhovedet er et Radonmål. Men som I kan se på midten af side 5.15 så er $\varphi(m_k)$ altid et Radonmål når blot φ er homeomorf.

Vi kan også give et nemt argument for at *enhver* isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda af formen $T(x) = T(0) + Ox$ for en ortogonal matrix O: Givet at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

så kan vi antage $T(0) = 0$, fordi $T - T(0)$ også er en isometri. Vi ser så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \mid x\,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \mid y\,) \tag{5}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$, og y med $T(y)$, uden at ændre værdien, fås

$$(\, T(x) \mid T(y)\,) = (\, x \mid y\,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

T er derfor skalarproduktbevarende, og for den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ gælder så at $(\, T(e_j) \mid T(e_k)\,) = \delta_{jk}$, hvorfor $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Af opskrivningen $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ følger så ved at tage indre produkt med $T(e_k)$ at $\lambda_k = (\, T(x) \mid T(e_k)\,)$, og derfor er

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \mid T(e_j)\,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \mid e_j\,) T(e_j). \tag{7}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, følgelig er $T(x) = Ox$ for en $n \times n$-matrix O. Nu medfører (6) at $O^{\mathrm{t}} O = I$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

8. gang, onsdag den 6. april. I opgavetiden kan I se på 5.8–5.10 (hvis I ikke allerede har lavet dem), dernæst 5.14+15. Desuden 5.18 og evt. 5.16.

Vi vil bruge denne og næste gang på at afslutte kapitel 5 inklusive et bevis for eksistensen af Lebesguemålet. I bogens appendix er der et eksistensbevis blot for $k = 1$, så vi vil i stedet gennemgå opgaverne 5.1–5.5. Vi vil dog begynde med at gå hurtigt gennem 5.5-5.7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

9. gang, onsdag den 13. april. Vi laver først opgaverne 5.24+28+31. De to sidste er af den slags der virkelig flytter grænserne for det man ville tro er muligt (eller de belyser hvordan ens intuition kan spille en et puds).

I kan også regne følgende: For hvilke værdier af $a > 0$ er funktionen $\frac{1}{x(\log x)^a}$, hvor $x > 2$, integrabel i ∞ ? *Vink:* En stamfunktion kan uden videre opskrives ! Bemærk dog at $a = 1$ er et særtilfælde, med en 'anderledes' stamfunktion.

Dernæst skulle 5.10 3° være ligetil.

Vi gennemgår idag eksistensbeviset for Lebeguemålet. Vi vil i store træk følge bogens appendix, i det mindste hvad angår Caratheodorys sætning; derefter vil vi gennemføre de overvejelser der er nødvendige for at anvende denne for vilkårlige $k \geq 1$ (og ikke bare $k = 1$ som i appendix).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

10.gang, onsdag den 20. april. Som opvarmning regnes 5.23; *vink:* find en metode til at få sætningen om målforholdet i spil.

Regn resten af 5.28+31. Fortsæt med 5.32. Er der tid til overs regnes gamle opgaver, eller 5.25 om eksistensen af ikke-Lebesuemålelige mængder, jævnfør sætning 5.30.

Fra kl. 10.15 gennemgår vi kapitel 6 frem til og med Tonellis sætning. Emnet bliver her de generelle sætninger om at ombytte integrationsordnen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

11. gang, onsdag den 27.april. Som opgver kan I først i fællesskab diskutere, hvorfor der for Lebesguemålet gælder at $m_{p+q} = m_p \otimes m_q$.

Dernæst kan I lave opgave 6.3, 6.6 og 6.11.

Desuden 6.14+15.

Fra klokken 10.15 gennemgås resten af kapitel 6 (så vidt muligt).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi fik sidste gang set på opgaverne 6.16–19, 6.22, 6.28.

Af nyt stof blev kapitel 7 gennemgået til og med side 7.8. Som et hovedpunkt fik vi set at man ved ækvivalensrelationen $f \sim g \iff f(x) = g(x)$n.o. på vilkårlige målrum opnår en skare af fuldstændige normerede vektorrum $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, såkaldte Banachrum.

I dette indgik som hovedresultater både Hölders og Minkowskis uligheder:

$$\int_X |fg|\,d\mu \leq \Bigl(\int_X |f|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p}\Bigl(\int_X |g|^q\,d\mu\Bigr)^{1/q}, \qquad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}; \tag{8}$$

$$\Bigl(\int_X |f+g|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p} \leq \Bigl(\int_X |f|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p} + \Bigl(\int_X |g|^p\,d\mu\Bigr)^{1/p} \tag{9}$$

Bemærk at disse også kan vises alment for positive målelige funktioner (hvorved $|\cdot|$ er overflødigt); jævnfør opgave 7.6 og 7.8.

13. gang, onsdag den 18. maj. Vi beskæftiger os først med opgaverne 6.27 (geometri), 7.1, 7.3–4, 7.16 og 7.18. De skulle være ligetil.

Dernæst gennemgår vi resten af kapitel 7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

14. gang, fredag 20. maj. Vi mødes her i tidsrummet 11.15 til 15.00.

Som opgaver skal i først fuldstænddigøre beviset for sætning 7.28. Hertil foreslår jeg følgende slagplan:

- Vis at der for en fast lukket mængde F i et metrisk rum M defineres en funktion $x \mapsto d(x, F) := \inf\{ d(x, y) \mid y \in F \}$.

  Vis at $d(x, F)$ er kontinuert $M \to \mathbb{R}$.

- Regn dernæst opgave 5.16.

- For at indse eksistensen af den kompakte mængde i begyndelsen af sætning 7.28's bevis regnes opgave 5.19. *Vink:* Ved brug af opgave 5.16 laves først 5.17, så 5.18 og endelig 5.19. Det bliver nemmere jo længere man kommer.

Endelig laves gamle opgaver.

Ved forelæsningen nævnes kort rummet $L^\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$, som groft sagt består af de (klasser af) funktioner, som er begrænsede næsten overalt. Dog er normen $\|f\|_\infty$ lig det såkaldte μ-essentielle supremum for $|f|$. Læs så vidt muligt på forhånd om dette !

Hovedvægten lægges dog på Fourierteorien, med gennemgang af side 8.1–8.10, ca.

Sidste seance bliver

15. gang, onsdag den 25. maj. Regn opgave 8.10 og 8.1–2. Dernæst 8.4 og 8.8 til uddybning af teksten.

Vi gennemgår til sidst resten af kapitel 8, hvor vi blandt vil vise nogle af de berømte resultater for Fouriertransformationen; f.eks. at den giver en isometri af Hilbertrummet $L_2(\mathbb{R}^k)$ på sig selv.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Pensum og eksamen.

Pensum er de gennemgåede dele af C. Bergs og T. Gutmann Madsens fælles notehæfte "Mål- og integralteori".

Til den mundtlige eksamen kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Entydighedssætningen for mål.

(2) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(3) Produktmål.

(4) Tonellis og Fubinis sætninger.

(5) Lebesguerummene og deres fuldstændighed.

(6) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(7) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Spørgsmål fra jeres side kan stilles fredag den 17/6, klokken 14.15; vi mødes i lærerlokalet på basisuddannelsens sekretærgang.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen