Oversigt nr. 1

Emnet for kurset i optimering vil her i efteråret 2005 blive *variationsregning* og *optimal kontrolteori*. Hensigten er at I skal stifte bekendtskab med disse metoder og især den type af optimeringsproblmer som de kan behandle.

Som I vil få at se ligger problemerne langt ud over hvad I tidligere har kunnet håndtere ved at sætte partielle afledte lig nul. Groft udtrykt skal vi beskæftige os med generelle, men dog slagkraftige, metoder til at omskrive optimeringsproblemer til nogle ordinære differentialligninger, som så kan løses. Mere derom senere.

Kurset vil basere sig på følgende bog:

[SS] Optimal control theory with economic applications, af Atle Seierstad og Knut Sydsæter; North Holland 1987.

Første gang er fredag den 9/9 klokken 8.15; vi ses i G5-110. Et program for første seance kommer i næste uge.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Efter aflysningen den 9/9, som jeg meget beklager, mødes vi til kursusstarten den 16/9 i stedet.

Vi skal blandt andet diskutere hvorledes undervisningen skal organiseres. For at tilegne sig kursets synspunkter vil det være centralt at regne de stillede opgaver. Men det foregår nok bedst, når opgaveregningen er forsinket en seance i forhold til forelæsningen (som vanligt), så mit forslag er derfor for

1. gang, fredag den 16. september. Vi mødes klokken 8.15-10.00 (i G5-109) til forelæsning. Jeg vil opsummere lidt af det optimering I kender, nævne et par historiske eksempler på *variationsregning*, og endelig gennemgå s. 13–23 i [SS] om dette emne. Hovedemnet bliver *Eulers ligninger* som en nødvendig betingelse for et ekstremum.

Fra 10–12 kan I i grupperne tage fat på opgaverne, som nedenfor stilles til næste gang.

2. gang, fredag den 23. september. Her forelsår jeg at vi begynder kl. 8.15 med at regne opgaverne 1.1.1, 1.2.1+3+4+5+6 fra [SS] i grupperne

Desuden kan I regne opgave 13.5.51 i Edwards og Penney fra basis, som en anvendelse af partielle afledte; den går ud på at minimere overfladen af en bøje under den *bibetingelse* at voluminet holdes konstant. (*Vink:* Man skal udlede to ligninger med to ubekendte, f.eks. radius og højden, og dernæst betragte voluminet som en kendt konstant, der kan optræde i løsningen.)

Klokken 10.15–12.00 gennemgås s. 25–31 i [SS]. Med afsæt i det vi kender fra funktioner af en variabel, skal vi se på Legendres *nødvendige* betingelse for ekstremum.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Vi så sidste gang på Legendres nødvendige betingelse for et (lokalt) maksimum i variationsregningen, nemlig at $\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{x}^2} \leq 0$.

Vi omtalte også, at Legendre betingelsen udsprang af den 2. ordens betingelse at $I''(0) \leq 0$ (jvf. notationen i udledningen af Eulerligningen). For sammenligningens skyld gennemgik vi det tilsvarende resultat for funktioner af n reelle variable:

Sætning. Lad $f\colon O \to \mathbb{R}$ være C^2 på en åben mængde $O \subset \mathbb{R}^n$. Da gælder

$$\begin{aligned} &f \text{ har lokalt maksimum i } x^* \in O \implies \nabla f(x^*) = 0 \text{ og} \\ &\qquad Hf(x^*) := \big(\tfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x^*)\big) \text{ har egenværdier } \lambda_j \leq 0 \text{ for } j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{1}$$

Omvendt gælder, at dersom $Hf(x^*)$ har n strengt negative egenværdier i et kritisk punkt $x^* \in O$, da har f lokalt maksimum i x^*.

Bemærk at der efterlades et lille hul mellem de nødvendige og tilstrækkelige betingelser. Men dette kan ikke undgås (overvej f.eks. $x^2 - y^4$ i origo).

Bevis: Da f er C^2 haves Taylors formel, for en passende ε-funktion,

$$f(x) - f(x^*) = \nabla f(x^*) \cdot (x - x^*) + \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T Hf(x^*)(x - x^*) + \varepsilon(\|x - x^*\|)\|x - x^*\|^2.$$

Når x^* er et ekstremumspunkt giver dette at $\nabla f(x^*) = 0$. Thi ellers kan man sætte $\|x - x^*\|$ uden for parentes på højre side og notere at $\nabla f(x^*) \cdot (\frac{1}{\|x - x^*\|}(x - x^*))$ antager både positive og negative værdier på ethvert liniestykke parallelt med $\nabla f(x^*)$ gennem x^*; og dette strider mod at $f(x) - f(x^*)$ har konstant fortegn på alle sådanne men tilpas små liniestykker.

Da $Hf = Hf^T$ og reel, er Hf selvadjungeret og i følge spektralsætningen diagonaliserbar og med reelle egenværdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Dvs. at $Hf(x^*) = PDP^T$ for $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ og en passende valgt ortogonal $n \times n$-matrix P bestående af egenvektorer for $Hf(x^*)$. Indføres $y = P^T(x - x^*)$, hvorved $\|y\| = \|x - x^*\|$, fås derfor

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^*) &= \tfrac{1}{2}(x - x^*)^T PDP^T (x - x^*) + \varepsilon(\|x - x^*\|)\|x - x^*\|^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2) + \varepsilon(\|y\|)\|y\|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Tages specielt $y = (0, \ldots, 0, y_j, 0, \ldots, 0)$ giver dette

$$(\tfrac{1}{2}\lambda_j + \varepsilon(|y_j|))y_j^2 = f(x) - f(x^*). \tag{3}$$

For et maksimumspunkt x^* er højresiden negativ (el. 0) for $\|x - x^*\| = |y_j|$ i en omegn af 0, og da $\frac{1}{2}\lambda_j + \varepsilon(|y_j|)$ har samme fortegn som λ_j for $|y_j|$ i en evt. mindre omegn af 0, så ses at $\lambda_j > 0$ er umuligt.

Omvendt ses af (2) at

$$f(x) - f(x^*) \leq (\tfrac{1}{2}\max(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) + \varepsilon(\|y\|))\|y\|^2. \tag{4}$$

Hvis alle $\lambda_j < 0$, så er parentesen på højre side negativ el. 0 for y i en tilpas lille kugle $B(0,r)$. Da er $f(x) \leq f(x^*)$ for $x \in B(x^*, r)$, som ønsket.

Lad mig for en god ordens skyld opskrive den nøjagtige udgave af Taylors formel, som vi har brugt. Hvis $g\colon I \to \mathbb{C}$ er en C^n-funktion på et åbent interval $I \subset \mathbb{R}$, så gælder for t, $t_0 \in I$ at

$$g(t) = g(t_0)+\cdots+\tfrac{g^{(n-1)}(t_0)}{(n-1)!}(t-t_0)^{n-1}+\tfrac{(t-t_0)^n}{(n-1)!}\int_0^1 (1-\theta)^{n-1}g^{(n)}(t_0+\theta(t-t_0))\,d\theta. \tag{5}$$

Dette kan opnås ved induktion efter n, idet man læser $(1-\theta)^{n-1}$ som $-\frac{1}{n}\frac{d}{d\theta}(1-\theta)^n$ og udfører delvis integration.

Herfra kan man ret direkte udlede Taylors grænseformel (under samme forudsætninger):

$$g(t) = g(t_0) + \cdots + \tfrac{g^{(n)}(t_0)}{n!}(t-t_0)^n + \varepsilon(t-t_0)(t-t_0)^n. \tag{6}$$

Faktisk kan ε-funktionen opnås ved at man trækker $\frac{g^{(n)}(t_0))}{n!}(t-t_0)^n$ fra integral-restleddet; for her er $\frac{1}{n} = \int_0^1 (1-\theta)^{n-1}\,d\theta$ så man kan udnytte at $g^{(n)}$ er kontinuert i t_0 (prøv selv efter !).

For funktioner af flere variable kan begge formler f.eks. udnyttes ved at se på $g(t) = f(x^* + t(x-x^*))$ osv.

3. gang, fredag den 30. september. Her vil vi se på opgaverne 1.3.1–2 og 1.4.1–4. Som baggrund for opgaver i kapitel 1.4 må I hjemmefra læse dette afsnit (det er ikke dybsindigt). Er der tid til overs kan I regne resten af de gamle opgaver.

Dernæst gennemgås side 31–38 i [SS]. Her er hovedsigtet at introducere andre terminalbetingelser end lige $x(t_1) = x_1$; derved bliver variationsregningen lettere at tilpasse de praktisk forekommende eksempler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi fik sidste gang gennemgået variationsproblemer med andre og mere generelle *terminalbetingelser*. For sådanne fik vi udledt Eulerligningen og de såkaldte *transversalbetingelser*. Til den ende fik vi givet et mere præcist argument end det på side 25 i [SS], idet vi brugte implicit funktionssætningen.

4. gang, tirsdag den 4. oktober. Vi mødes her til gennemgang af nyt stof klokken 12.30. Som et første punkt vil vi behandle optimering af en reel funktion under *bibetingelser*. Dels er dette ment som et supplement til det basale, som går forud for variationsregningen (som vi skal se kan den tidligere stillede opgave om bøjen f.eks. angribes ad denne vej). Dels vil det danne baggrund for kontrolteorien vi begynder på i næste uge.

Dernæst gennemgår vi side 39–48 i [SS], både om tilstrækkelige betingelser og om yderligere andre typer af problemer.

Dernæst vil vi til opgaveregningen se på 1.4.5 og 1.4.7 samt 1.5.1–4. Især 1.5.3 burde vist appellere til brede kredse...

5. gang, fredag den 7. oktober. Her ser vi på opgaverne 1.6.1–2, 1.6.4 og 1.7.1–2, 1.7.4. Og gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Dernæst gennemgås resten af kapitel 1 frem til side 61 inklusive.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Sidste gang gjorde vi en del ud af at finde ekstremum for en funktion af n reelle variable opfyldende k ekstra ligninger. Herunder fik vi diskuteret hvorledes teorien fører til en ret direkte løsning af opgave 13.5.51 i Edwards og Penneys bog (opgavene om bøjen fra 1. gang).

Det gennemgåede følger i nedenstående notat.

Optimering under bibetingelser. I det følgende betragtes en C^1-funktion $f\colon O \to \mathbb{R}$ på en åben mængde $O \subset \mathbb{R}^n$. Opgaven er så at bestemme dens ekstremværdier når x i stedet for hele O blot skal gennemløbe løsningsmængden, $\mathcal{F}$, til ligningerne

$$g_1(x) = c_1, \quad \dots \quad , g_k(x) = c_n. \tag{7}$$

Herved er alle $g_j \in C^1(O, \mathbb{R})$ givne funktioner. At bestemme $\max_{x\in\mathcal{F}} f(x)$ og $\min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$ omtales som ekstremumsbestemmelse for f under de ved $g_1, \dots, g_k$ givne bibetingelser (7). Herved antages at $k < n$ (idet der ellers kun kan forventes endeligt mange, eller ingen, løsninger til (7)).

Bemærk at Jacobimatricen for $\mathcal{G} := \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_k \end{pmatrix}$ ikke er forudsat surjektiv, så $\mathcal{F} = \mathcal{G}^{-1}(\{(c_1, \dots, c_k)\})$ er ikke nødvendigvis en regulær C^1-flade i O.

Som en nødvendig betingelse for ekstremum under bibetingelser har man:

Sætning. Hvis $x^* \in O$ giver f en ekstremværdi og opfylder bibetingelserne i (7), da har matricen

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix} (x^*) \tag{8}$$

ikke maksimal rang. (Dvs. der er højst k lineært uafhængige rækker.)

Bevis: Antag at $\operatorname{rang} M = k + 1$; ved omnummerering af de variable kan det antages at de $k + 1$ første søjler er lineært uafhængige. Med en hjælpevariabel $u \in \mathbb{R}$ kan man indføre

$$F(x, u) = \begin{pmatrix} f(x) + u \\ g_1(x) \\ \vdots \\ g_k(x) \end{pmatrix}.$$

Dette er en C^1-funktion $O \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{k+1}$ med $\frac{\partial F}{\partial x, \partial u}(x^*, 0) = \begin{pmatrix} M & e_1 \end{pmatrix}$, skrevet som blokmatricer; herved betegner e_1 den første naturlige basisvektor.

For at anvende sætningen om implicit givne funktioner betegnes punkterne $(x, u) \in \mathbb{R}^{k+1}$ nu med (y, z), idet $y = (x_1, \dots, x_{k+1})$ og $z = (x_{k+2}, \dots, x_n, u)$. Specielt sættes $(y^*, z^*) = (x^*, 0)$, således at (y^*, z^*) tilhører løsningsmængden til

$$F(y, z) = \left(\begin{smallmatrix} f(x^*) & c_1 & \dots & c_k \end{smallmatrix} \right)^T . \tag{9}$$

Herved fastlægges en C^1-flade lokalt nær (y^*, z^*), idet $\frac{\partial F}{\partial y}(y^*, z^*)$ i følge antagelsen er regulær, specielt surjektiv.

Det følger heraf at der findes en C^1-funktion ψ defineret på en åben omegn af z^* og to tilpas små lukkede kugler $B_1 = \bar{B}(y^*, \alpha)$, $B_2 = \bar{B}(z^*, \beta)$ sådan at $\psi \colon B_2 \to B_1$ og at (9) i $B_1 \times B_2$ netop løses af punkterne på ψ's graf.

Specielt løses (9) af $(\psi(z), z)$ for $z = (x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u)$ for $u \in [-\beta, \beta]$. Af første indgang i F ses da, at der for *alle* $u \in [-\beta, \beta]$ gælder

$$f(\psi(x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u), x^*_{k+2}, \dots, x^*_n) + u = f(x^*).$$

På grund af kontinuiteten af $u \mapsto \psi(x^*_{k+2}, \dots, x^*_n, u)$, viser dette at der i enhver kugle $B(x^*, r)$ findes punkter x', x'' hvor $f(x') > f(x^*)$ og $f(x'') < f(x^*)$ gælder. Fordi $(\psi(z), x^*_{k+2}, \dots, x^*_n) \in \mathcal{F}$, er $f(x^*)$ derfor ikke en ekstremværdi på $\mathcal{F}$; hvilket beviser sætningens påstand.

Bemærkning. I det specialtilfælde at M's første række er en linearkombination af de øvrige ses at der eksisterer skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sådan at $\nabla f(x^*) + \lambda_1 \nabla g_1(x^*) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x^*) = 0$. Dermed er

$$\nabla(f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k)(x^*) = 0 \tag{10}$$

så funktionen $f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k$ har kritisk punkt i x^*. I det tilfælde hvor $g_1, \dots, g_k$ vides at have lineært uafhængige gradienter, kan ekstremumspunkterne for f under bibetingelserne derfor bestemmes blandt de kritiske punkter for $f + \lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_k g_k$.

Herved har man altså i alt $n + k$ ubekendte i samme antal ligninger, nemlig $x_1, \dots, x_n$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ som optræder i de n ligninger i (10) og i de k bibetingelser.

Denne metode til bestemmelse af ekstremumspunkter under bibetingelser omtales som benyttelse af *Lagrange'ske multiplikatorer* (som er tallene $\lambda_1, \dots, \lambda_k$). I praksis er sætningen dog ofte mere bekvem, da man dels ikke behøver påvise gradienternes lineære uafhægighed, dels kan få en regneteknisk lettelse i at undersøge hvor M ikke har maksimal rang.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Sidste gang fik vi gennemgået eksempel 11 og optimering med skrotfunktioner. Dog blev det overladt til jer selv at læse den sætning, der indirekte er formuleret øverst side 48 i [SS].

Desuden blev variationsregningen udvidet til situationen med *vektorfunktioner* som de ubekendte, der optimeres mht. Til illustration blev eksempel 15 gennemgået.

6. gang, tirsdag den 11. oktober. Her gennemgår vi resten af kapitel 1 om *værdifunktioner* og problemer med variabel sluttid samt side 60-61 med betragtninger over *eksistens* af løsninger til variationsproblemer. Desuden tager vi en afstikker til anvendelserne i mekanik (og fysik generelt), med eksempler.

Fra 13.30 beskæftiger vi os med opgaverne 1.7.1–2+4 (igen), 1.8.1–2 og 1.8.4.

Desuden kan I bevise påstanden vi brugte om konkave funktioner (da vi udledte tilstrækkelige betingelser for et maksimum): *Hvis* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *er konkav og differentiabel på en åben, konveks mængde* $U \subset \mathbb{R}^n$*, så gælder*

$$f(y) \le f(x) + \nabla f(x) \cdot (y - x), \qquad \textit{for } x, y \in U.$$

Vink: For $n = 1$ reduceres påstanden til den (geometrisk oplagte) sag at f' er aftagende; dette ses at følge af at der for $y < x < z$ gælder

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \ge \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

som fås af konkaviteten af f. Tilfældet $n > 1$ kan behandles ved at forbinde x og $y \in U$ med en ret linie og udnytte resultatet for $n = 1$.

7. gang, fredag den 14. oktober. Som opgaver ser vi på 1.8.3, 1.8.6, 1.8.8. Og 1.8.7 angående problemer med variabel sluttid. Evt. gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Til forelæsningen tager vi fat på en mere generel problemstilling, nemlig at vælge sig en *optimal kontrol*. Vi gennemgår side 69–83.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

1. obligatoriske opgave. Hver gruppe afleverer en besvarelse, underskrevet af gruppemedlemmerne, af følgende to problemer. Dels bogens øvelse 1.7.3, dels den øvelse at brachistochronen er en cykloidebue.

Det sidste kan ske på følgende måde. Givet to punkter O og P i en lodret plan tænkes tyngdeaccelerationen g at føre en træperle gnidningsfrit langs et stykke C^∞ glat ståltråd mellem O og P; problemet er da at bestemme ståltrådens(=banekurvens) form således at perlen føres fra O til P på kortest mulige *tid*. For simpelhedens skyld indlægges et koordinatsystem med origo i O, vandret x-akse og lodret y-akse pegende *nedad* så $P(a,b)$ for passende $a > 0$, $b > 0$.

(1) Skriv problemet som et variationsproblem hvori banekurven er givet som en ubekendt funktion $y(x)$ for $0 \leq x \leq a$. Man kan udgå fra at perlen i et lille tidsrum dt gennemløber en buelængde $ds = vdt$, hvor v er farten. Derved er rejsetiden $\Delta t = \int_0^a \frac{ds}{v}$, hvori ds og v skal udtrykkes ved x. (Brug at $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$ langsbanekurven.)

(2) Vis dernæst at en løsning $y(x)$ nødvendigvis må opfylde at $y(x)(1+y'(x)^2)$ er konstant.

(3) Vis at en cykloidebue opfylder ovenstående: En cykloidebue er trajektoriet af origo, når dette fremføres af en cirkel med radius r ved rulning langs x-aksen og udgående fra centrum i $(0,r)$; cykloiden har derved parameterfremstilling

$$x(\varphi) = r(\varphi - \sin\varphi), \qquad y(\varphi) = r(1 - \cos\varphi).$$

Dette kan bruges uden bevis til at eliminere φ og finde y som funktion af x. (Man må her nok nøjes med at bruge $f(\varphi) = \varphi - \sin\varphi$ og dens inverse f^{-1} som ubestemte hjælpefunktioner.) Vis så at $y(x)$ løser ligningen.

(4) Diskuter hvorvidt r er bestemt ved P.

I bedes aflevere både opgave 1.7.3 og den om brachistochronen senest fredag den 28. oktober.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Vi tog sidste gang fat på optimal kontrolteori, hvor man skal bestemme

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)\, dt$$

hvor den ubekendte er *kontrolfunktionen* $u(t)$, som dels er bundet af kravet $u(t) \in U$ for en given *lukket* mængde $U \subset \mathbb{R}^n$; dels fastlægger *tilstandsfunktionen* $x(t)$, da denne skal opfylde

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t) \quad \text{for} \quad t_0 < t < t_1$$

sammen med $x(t_0) = x^0$ og de sædvanlige terminalbetingelser for $t = t_1$.

Som et hovedresultat fik vi formuleret de nødvendige betingelser for en løsning til problemet, dvs. Pontryagins *maksimumsprincip*. Men som vi så er dette hverken enkelt at formulere eller udmønte i praksis.

Desuden er der den vanskelighed, at $u(t)$ kun er antaget stykkevist kontinuert på $[t_0, t_1]$, så højresiden af differentialligningen, dvs. $f(\cdot, u(t), t)$ er ikke en kontinuert funktion af (x, t) på $\mathbb{R}^n \times \,]t_0, t_1[$. Eksistens- og entydighedssætningen er derfor ikke til rådighed i formen kendt fra Mat1; men man har tilsvarende resultater i den mere generelle ramme, som omtalt i Appendiks A i [SS].

8. gang, tirsdag den 25. oktober. Vi begynder her med gennemgang af side 84–109 i [SS], dog ej eksempel 4. Vi skal både se at variationsregningen er et specialtilfælde af kontrolteorien, hvori Eulerligningen fås af maksimumsprincippet, og se på tilstrækkelige betingelser for en løsning.

Som opgaver ser vi på 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 og 2.3.5. Desuden kan I lave resten af opgaverne fra 6. og 7. gang.

9. gang, fredag den 28. oktober. I opgaveregningen vil programmet være 2.3.3, 2.3.6 og 2.3.7. Desuden 2.4.1 og 2.4.2 (forbered jer ved at gennemgå eksempel 3 hjemmefra).

Som oplæg til weekendens mentale adspredelse vil vi af nye sager se på (resten af side 84–109 og) side 131–134 om *eksistens* af løsninger til kontrol problemer — vi vil her møde en stor klasse af såkaldte *målelige* funktioner, som kan være ganske diskontinuerte, men mere herom på fredag (og på mat4). Desuden side 142–145 om variabel sluttid.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Vi fik idag gennemgået resten af de tilstrækkelige betingelser (Arrows sætning) for løsning af kontrolproblemet. Desuden side 142–145 om variabel sluttid.

Som hovedeksempel på dette så vi i detaljer på månelandingsproblemet. Hovedkonklusionen derfra var at den optimale løsning er en passende *bang-bang* kontrol, som ydermere er en *feed-back* kontrol. (Det oprindelige ønske om at minimere brændstofforbruget blev ikke analyseret, men det 'mindste' F man kan bruge afhænger jo af startbetingelsen (v_0, h_0) for selve landingen.)

10. gang, tirsdag den 1. november. Her begynder vi med eksistens af løsninger til kontrolproblemer, side 131–134, som vi ikke nåede d. 28/10. Desuden vil vi se på beviset for maksimumsprincippet; hertil følges et notesæt som udleveres.

Som opgaver ser vi på 2.6.1 og 2.6.2 for at belyse de tilstrækkelige betingelser for en løsning. Regn også 2.6.4 og 2.6.5 — hvad fortæller disse resultater om sætning 4 og 5 ?

Fortsæt med de gamle opgaver.

11. gang, fredag den 4. november. Filippov–Cesaris eksistenssætning illustreres gennem opgave 2.8.1 og 2.8.3. Dernæst gamle opgaver fra 6.-10. seance (ryd op!).

Forelæsningen færdiggør noternes afsnit 5 om maksimumsprincippet; evt. fortsættes med afsnit 1 fra noterne, der er en optakt til nærmere studium af lineære problemer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

12. gang, tirsdag den 8. november. fik vi gennemgået resten af beviset for Pontryagins maksimumsprincip, med visse korrektioner og simplificeringer af forklaringen i noternes afsnit 5.2. Jævnfør de udleverede håndskrevne noter.

Opgaveregningen drejede sig om 2.6.3, 2.8.3, 2.8.5 og 2.8.6.

13. gang, fredag den 11. november. Vis først uligheden i formel (22) i de noter, jeg udleverede sidst.

Dernæst ser vi på opgaverne 2.8.5 og 2.8.6 (medmindre man fik dem lavet sidst) samt 2.8.7 og 2.8.9.

Endelig kan 2.9.1 regnes for at belyse problemer med variabel sluttid.

Ved forelæsningen gennemgås noternes afsnit 1–2, med hovedvægten på sidstnævnte. Vi skal her især se på det fænomen at et kontrolproblem, eller ditto -system, kan være *kontrollerbart*. Dette kan analyseres i det lineære tilfælde, som vi skal se.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Som en reference for jer mindes om at vi fik gennemgået

Grönwalls ulighed. *For to ikke-negative, kontinuerte funktioner f og k på et interval $[t_0, T[$ (evt. for $T = \infty$) vil den første af de to følgende uligheder medføre den anden:*

$$f(t) \le c + \int_{t_0}^{t} k(s) f(s)\, ds \le c \exp\Big(\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\Big); \tag{11}$$

her er $c \ge 0$ en konstant, eller sågar en voksende funktion $c(t) \ge 0$.

Beviset for (11) føres ved at vise den for et vilkårligt $t_1 > t_0$; så kan $c(t)$ erstattes af konstanten $c(t_1)$. Om $F(t) := c(t_1) + \int_{t_0}^{t} k(s) f(s)\, ds$, for $t_0 \le t \le t_1$, gælder at F er differentiabel med $F'(t) = k(t) f(t)$. Så er $k(t) \exp(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds)$ en *integrationsfaktor*, idet den givne ulighed $f(t) \le F(t)$ medfører at

$$f(t) k(t) \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\Big) - F(t) k(t) \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\Big) \le 0,$$

der ifølge differentiationsreglerne er ækvivalent med

$$\tfrac{d}{dt}\Big(F(t) \exp\Big(-\int_{t_0}^{t} k(s)\, ds\Big)\Big) \le 0.$$

Ved integration over $[t_0, t_1]$ fås at $F(t_1) \le F(t_0) \exp(\int_{t_0}^{t_1} k(s)\, ds)$, og følgelig $f(t_1) \le F(t_1) \le c(t_1) \exp(\int_{t_0}^{t_1} k(s)\, ds)$; qed.

14. gang, tirsdag den 15. november. Vi begynder med at gennemgå resten af kapitel 2 i noterne, fra lemma 2.5 og frem. Vi skulle også gerne kunne gøre kapitel 3 om tidsminimeringsproblemet færdigt.

Til opgaverne ser vi først på lineære differentialligninger af 1. orden med *variable* koefficienter:

$$\tfrac{d}{dt} x(t) = A(t) x(t) + b(t), \qquad x(t_0) = x^0. \tag{12}$$

Her er $x^0 \in \mathbb{R}^n$ og $b \in PC^0(]t_1, t_2[)$ de givne data, mens $A(t) = (a_{ij}(t))$ er en $n \times n$-matrix med indgange $a_{ij} \in PC^0(]t_1, t_2[)$; løsningen $x(t)$ søges i $C^0 \cap PC^1(]t_1, t_2[)$.

(1) Vis at der for en matrix M gælder at $\|M\| \le |||\, M \,|||$, idet $|||\cdot|||$ betegner den euklidiske norm af M (opfattet som element i $\mathbb{R}^{n^2}$). Slut heraf at $t \mapsto \|A(t)\|$ er stykkevist kontinuert på $]t_1, t_2[$.

(2) Vis at $f(t,x) = A(t)x + b(t)$ opfylder en Lipschitzbetingelse lokalt på $]t_1, t_2[\,\times\mathbb{R}^n$. Slut at (12) på en omegn af $t_0 \in\,]t_1, t_2[$ har en entydigt bestemt løsning.

(3) Vis at der om den maksimale løsning $x(t)$ for $t \geq t_0$ gælder at

$$\|x(t)\| \leq \|x^0\| + \int_{t_0}^{t} (\|b(s)\| + \|A(s)\|\|x(s)\|)\, ds. \tag{13}$$

Slut af Grönwalls ulighed at der for hvert kompakt delinterval $[t_3, t_4] \ni t_0$ eksisterer $c_1, c_2 > 0$ så

$$\|x(t)\| \leq c_1 \exp(c_2|t - t_0|), \quad \text{for} \quad t \in [t_3, t_4]. \tag{14}$$

(*Vink:* For $t < t_0$ skal $\int_{t_0}^{t}$ i uligheden (13) erstattes med $\int_{t}^{t_0}$; dernæst kan man omskrive til en ulighed for hjælpefunktionen $g(\tau) = \|x(t_0 - \tau)\|$, defineret for $\tau \in [0, t_0 - t_3]$, og anvende Grönwalls ulighed på denne.)

Konkluder at $(t, x(t))$ for $t \in [t_3, t_4]$ løber helt i en kompakt mængde $[t_3, t_4] \times \bar{B}(0, R)$, følgelig er $[t_3, t_4]$ ikke det maksimale definitionsinterval.

(4) Lad $\varphi_1(t),\ldots, \varphi_n(t)$ betegne de maksimale løsninger for den homogene ligning med $x^0 = e_1,\ldots, x^0 = e_n$ ved $t = t_0$. Indfør *fundamentalmatricen* $\Phi(t, t_0) = \left(\varphi(t) \;\cdots\; \varphi_n(t) \right)$.

Vis at Φ fører en vilkårlig begyndelsestilstand x^0 over i tilstanden/vektoren $x(t) = \Phi(t, t_0)x^0$ til tiden t. Slut at $x(t)$ er i $C^1(\,]t_1, t_2[\,)$.

(5) Betragt den generelle løsningsformel for det inhomogene begyndelsesværdiproblem:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s)b(s)\, ds. \tag{15}$$

Læs en halv side frem fra noternes formel (4.4) og konkluder at $\Phi(t, s)$ er kontinuert mht. s, og at integralet derfor har mening.

Vis formlen for $x(t)$ ved at gøre prøve.

(6) Vis at ligningen $\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}^*$, med $p(T) = 0$, giver et problem af denne type. Slut at $p(t)$ altid er veldefineret på hele $[0, T]$.

Spiller det nogen rolle at $[0, T]$ er et lukket interval ? Kan disse konklusioner udstrækkes til andre transversalbetingelser ?

15. gang, fredag den 18. november. Her laver vi først opgaverne til noternes kapitel 3. Desuden tages resten af opgaverne fra 14. gang.

Vi gør desuden noterne færdige ved at gennemgå kapitel 4, som omhandler et velkendt problem kaldet det *kvadratiske omkostningskontrolproblem*, eller det lineære regulatorproblem.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

2. obligatoriske opgave. Som den næste obligatoriske opgave bedes i regne opgve 2.9.1 i [SS]. Opgaven vedrører modellen i bogens eksempel 2.3, dvs. eksemplet side 89, der tidligere har været gennemgået ved forelæsningen. Men som det fremgår af opgave 2.9.1 erstattes funktionalet nu med $\int_0^T (-1)\,dt$, således vi har et tidsminimeringsproblem.

I bedes aflevere besvarelsen individuelt i underskrevet stand til mig inden 1/12.

16. gang, tirsdag den 22. november. Her fortsætter vi med bogens kapitel 3.1-3.2. Hensigten er at diskutere mere generelle slutbetingelser og skrotfunktioner, så optimeringsteknikkerne lader sig anvende på større klasser af problemer.

Til opgaverne regnes noternes exercise 3.1–3.3 og evt. gamle opgaver.

17. gang, fredag den 25. november. Vi begynder med noternes exercise 4.1 og 4.3. Dernæst 3.1.3 og 3.1.1.

Dernæst fortsætter gennemgangen af kapitel 3.2 og 3.5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Vi fik sidste gang gennemgået eksempel 10 side 222-225 om spilteori og Nash ligevægt. Desuden som annonceret kapitel 3.2 og 3.5 til side 213.

18. gang, tirsdag den 29. november, klokken 8.15-12.00.

NB, NB !! Bemærk tidspunktet.

Vi begynder med øvelserne, dvs. opgaverne 3.1.2, 3.2.1, 3.2.7 og 3.2.4.

Fra 10.15 gennemgås kapitel 3.7–8 om problemer med uendelig tidshorisont.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

19. gang, fredag den 2. december.

Vi begynder med opgaveregning.

(1) Eftervis det såkaldte *maksimalitetsprincip:*

Hvis (x^*, u^*) maksimerer $\int_{t_0}^{t_1} f_0(x, u, t)\, dt$ og opfylder $\dot{x} = f(x, u, t)$ samt $x(t_0) = x^0$ (+terminalbetingelser), da er (x^*, u^*) også optimalt på *ethvert delinterval*. Dvs. at for ethvert $[t_2, t_3] \subset [t_0, t_1]$ vil restriktionen af (x^*, u^*) løse det tilsvarende kontrol problem med $x(t_2) = x^*(t_2)$ som terminalbetingelse.

Vink: For et vilkårligt tilladeligt par på $[t_2, t_3]$ kan man prøve at sammenstykke med (x^*, u^*) til et par på $[t_0, t_1]$.

(2) Overvej at PW-kriteriet side 231 er et naturligt krav.

(3) Prøv at udlede de nødvendige betingelser i Theorem 3.12 fra maksimumsprincippet på et begrænset interval $[t_0, T]$.

(4) Lav 3.8.2 og 3.8.1.

Dernæst gennemgås dele af kapitel 4 om kontrolproblemer med blandede bibetingelser. Vi genser her vores gamle venner *Lagrangeske multiplikatorer*; repeter gerne dette fra oversigt nr. 5.

Oversigt nr. 14

3. obligatoriske opgave. Det sidste obligatoriske opgavesæt består af:

- exercise 3.2.10* i [SS], som er en teoretisk opgave, hvori man (ud fra det kendte maksimumsprincip) skal udlede et sæt nødvendige betingelser for problemer med skrotfunktioner og generelle terminalbetingelser;
- exercise 3.6.2, som retter sig mod kontrolteoriens anvendelser. Man kan til denne opgave bruge eksempel 3.10 side 222, som tidligere er blevet gennemgået.

Pensum. Efter [SS], dvs. Seierstad og Sydsæter: "Optimal control theory with economic applications":

- Kapitel 1.1-1.8,
- Kapitel 2.1-2.9,
- Kapitel 3.1-3.2 og 3.5, samt Eksempel 3.10 og 3.7-3.8,
- Kapitel 4.1 og Eksempel 4.2 samt 4.3

Desuden har vi læst noter af Gerd Grubb: "Lectures on control problems" (1997), som erstatter kapitel 2.10–2.11 i [SS].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen