Oversigt nr. 1

I kurset matematik 1A skal vi beskæftige os med matematisk analyse, og der kommer groft sagt til at være tre emner:

- Funktioner af flere variable (hvordan differentierer og integrerer man den slags !?),
- komplekse tal,
- differentialligninger.

Men som I vil få at se begynder vi mere jordnært med noget velkendt: cosinus og sinus. Vi vil både repetere det og give et nyt perspektiv på sagen ved også at diskutere deres omvendte funktioner. Mere om det senere.

Vi vil benytte følgende bøger:

[EP] C. Edwards og D. Penney: *Calculus, 6th edition*, Prentice–Hall, New Jersey, 2002.

[EJ] H. Elbrønd Jensen: *Matematisk analyse 1*, 4. udgave, Institut for matematik, Danmarks tekniske universitet, 2000.

[RVC] Bo Rosbjerg og Henrik Vie Christensen: "Kompendium i calculus" og "Kompendium i komplekse tal og differentialligninger".

Disse skulle meget gerne være at købe i bogladen (Strandvejen 12–14, 1. sal).

1. gang, tirsdag den 5. september 12.30-16.15. Vi begynder med de trigonometriske funktioner og deres inverser, svarende til appendiks C og pp. 467–471 i [EP]. Da det er første gang vil programmet være:

kl. 12.30–14.40 Her vil jeg give en introduktion til kurset, og forelæse over ovennævnte emner.

kl. 14.50-16.15 Her regner vi opgaver. Alle regner 1, 3, 5, 7, 9, 11, 20, 27, 28, 29, 33, 37, 43, 47 i appendiks C af [EP].

Dem der har tid til overs går videre med 17, 19, 21, 25, 39 samme steds.

2. gang, torsdag den 7. september kl. 12.30–16.15.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering, blandt andet afsnit 7.5 i [EP].

- **12.50–14.45:** Diskuter først konceptopgaverne side 474 nederst i [EP]. NB! Dette gøres i *fællesskab* i grupperne, så I sikrer jer at I alle har forstået såvel problematikken som de svar, I når frem til. (Dette kan hjemme suppleres med sandt/falsk-opgaver fra cd-rom'en).

  Arcus-funktionerne belyses dernæst ved at regne opgaver fra afsnit 7.5 om:

  definitionen: opgave 1, 2, 3.

  differentialkvotienter: opgave 5, 6, 8, 9, 12, 17, 21.

  indbyrdes sammenhænge: opgave 56, 64 og 72.

- **14.55–16.15:** Her gennemgås afsnit 11.4 (dog ej side 702) i [EP] om *Taylor polynomier*.

  Emnet er at tilnærme funktioner med polynomier, sådan at man i en omegn af et fast punkt (kaldet *udviklingspunktet*) kun kommer til at begå en 'lille' fejl. Vigtige aspekter er dels *hvordan* disse polynomier bestemmes, dels *hvor stor* fejl man begår ved tilnærmelsen. (NB! Alle elektroniske regnemaskiner er baserede på dette tema, så det sådan set ganske fundamentalt for moderne anvendelser af matematik..)

En semesteroversigt kommer snarest.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Sidste gang gennemgik vi lidt alment om *afbildninger*:

Definition 1. *En afbildning* $f\colon D \to E$ *er en forskrift* f*, som til ethvert* $x \in D$ *knytter et og kun et element* $y \in E$*; dette skrives som* $y = f(x)$*. Den afsendende mængde* D *kaldes definitionsmængden for* f*; den modtagende mængde* E *kaldes dispositionsmængden.*

I tilfældet $D = \mathbb{R}$ og $E = \mathbb{R}$ er enhver afbildning blot en sædvanlig reel funktion, som f.eks. $\sin$ eller $\exp$.

Et andet eksempel fås af skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ af vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$. Dette er en afbildning $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$, når man som mængderne D og E bruger

$$D = \left\{ (\vec{u}, \vec{v}) \;\middle|\; \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \right\}, \qquad E = \mathbb{R}.$$

Et mere abstrakt eksempel er differentiation, dvs. $f \mapsto f'$, som giver en afbildning f.eks. fra mængden D af alle differentiable funktioner på intervallet $]3, 7[$; herved kunne E så blot være mængden af vilkårlige funktioner defineret på $]3, 7[$.

Blandt de egenskaber afbildninger kan have, så vi på følgende:

Definition 2. *Afbildningen* $f\colon D \to E$ *kaldes* **injektiv***, dersom*

$$x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2).$$

f *siges at være* **surjektiv***, hvis der til ethvert* $y \in E$ *eksisterer et element* $x \in D$ *som opfylder*

$$f(x) = y.$$

Hvis f *både er injektiv og surjektiv siges* f *at være en* **bijektion** *(eller bijektiv).*

Delmængden $\operatorname{Vm}(f) = \{\, y \in E \mid y = f(x)$ for et $x \in D \,\}$ kaldes for *værdimængden* for f; denne skrives også som $f(D)$ og kaldes da f's billede af D. Altså er f surjektiv netop når $f(D)$ ikke er en ægte delmængde af E.

Som et hovedresultat har man

sætning 1. *For en afbildning* $f\colon D \to E$*, mellem to vilkårlige mængder* D *og* E*, er følgende egenskaber ensbetydende:*

(i) *Der findes en afbildning* $g\colon E \to D$ *som opfylder*

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \quad \text{for ethvert } x \in D \\ f(g(y)) &= y \quad \text{for ethvert } y \in E. \end{aligned}$$

(ii) f *er både* injektiv *og* surjektiv.

I bekræftende fald er afbildningen $g\colon E \to D$ entydigt bestemt; og f siges at være inverterbar, mens g kaldes inversen *(el. den omvendte afbildning) til f og skrives $g = f^{-1}$*. Ydermere er f^{-1} selv inverterbar med $(f^{-1})^{-1} = f$.

Bevis: For at vise at (i) $\implies$ (ii) antages at en afbildning g som i (i) eksisterer. Da er f injektiv, for hvis $x_1 \neq x_2$ så gælder også $f(x_1) \neq f(x_2)$. Eneste anden mulighed er nemlig at $f(x_1) = f(x_2)$, men denne ville på grund af (i) give følgende modstrid

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Anden linie af (i) giver direkte at f er surjektiv. Dermed er (ii) vist at gælde for f.

Omvendt kan det antages at f opfylder (ii). Da f er surjektiv sluttes, at der til ethvert $y \in E$ eksisterer (mindst) en løsning $x \in D$ til ligningen

$$y = f(x). \tag{1}$$

Da f er injektiv er x entydigt bestemt ved y. Dermed giver $y \mapsto x$ en afbildning $g\colon E \to D$; da $g(y) = x$ viser (1) at $f(g(y)) = y$; og da $y \in Y$ er et vilkårligt element viser dette anden linie af (i). Anvendes g på begge sider af (1) ses at $x = g(y) = g(f(x))$; dette giver første linie af (i). Dermed er implikationen (ii) $\implies$ (i) vist.

I bekræftende fald noteres, at hvis også $h\colon E \to D$ er en afbildning som opfylder at $h(f(x)) = x$ og $f(h(y)) = y$ for alle $x \in D$ og alle $y \in E$ (altså har samme egenskaber som g), så er $h(y) = g(y)$ for ethvert $y \in E$. For da f er surjektiv, så er $y = f(x)$ så man har at

$$h(y) = h(f(x)) = x = g(f(x)) = g(y).$$

Dette viser at g er entydigt bestemt ved f, så man kan skrive $g = f^{-1}$. Betragtes udsagnene i (i) for $g = f^{-1}$ ses at f^{-1} er inverterbar, og da dennes inverse er entydigt bestemt er $f = (f^{-1})^{-1}$. Beviset er ført.

3. gang, tirsdag den 12. september.

kl. 8.15–8.35 Repetition af begreber som injektiv, surjektiv og inverterbare afbildninger. Og af Taylorpolynomier.

kl. 8.35–10.35 Som opgaver tager vi:

(1) Er skalarproduktet af vektorer i $\mathbb{R}^3$ er en injektiv afbildning? Er den surjektiv ? Bijektiv ? Inverterbar ?

(2) Diskuter i gruppen hvorvidt $f(x) = x^4 - x^2$ er en injektiv/surjektiv/bijektiv afbildning $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Overvej hvilken indskrænkning af funktionen, der ville give en injektiv afbildning. Hvilken ændring giver en surjektion? Og hvordan ser inversen så ud ?

(3) **Formuleringsøvelse:** Ved tavlen præsenteres den almene definition af injektiv henholdsvis surjektiv, med konsekvenser for $f(x) = x^4 - x^2$. (Gøres på skift af alle gruppemedlemmer, der overhører hinanden.)

(4) Regn opgaverne 1–10 i afsnit 11.4 af [EP]. (Nøjes med selve Taylor-polynomierne — restleddene tager vi næste gang.)

10.40–12.00 For at afrunde det generelle om inverse/omvendte afbildninger gennemgås først ovennævnte sætning 1.

Dernæst tager vi resten af kapitel 11.4 i [EP]. NB! I starten af dette afsnit står der noget om uendelige summer, f.eks. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. I bedes gå let hen over dette, og begynde i linie 9 fra neden side 702.

Vi koncentrerer os om Taylors formel med restled. Endelig gennemgås eksempler.

4. gang, torsdag den 14. september.

- **12.30–12.50:** Repetition om Taylors formler med *restled*.
- **12.50–14.45:** Opgaverne belyser følgende temaer:

  Lagranges restled: Angiv dette i opgaverne 1–10 i afsnit 11.4 af [EP].

  Udviklingspunkter: Regn 11.4.11+13, og bemærk hvor stor en forskel det giver at udviklingspunktet nu er ændret ift. 11.4.1+2.

  Tilnærmelser: Find en tilnærmelse til $\sqrt{1,0028}$ vha. Taylors formel for $n = 3$ (brug opg. 11.4.5). Husk at kontrollere restleddets størrelse. Prøv at finde $\sqrt[5]{100032}$ på tilsvarende måde ($n = 2$).

  Introduktion til videnskabelige beregninger: Kan fås ved følgende anvendelse af Taylor-teorien: Bestem “din egen” tilnærmelse til værdien af π ved at gøre som i opgave 11.4.54.

  (Bemærk her, at det at addere et antal led i formel (27) side 712 blot svarer til at finde en funktionsværdi af $P_n(x)$ (for $\arctan$) for et tilpas stort n. I den forstand tilnærmes π via Taylors formel.)

  Læs den historiske note side 712 nederst, og bliv imponeret!

- **14.55–16.15:** Gennemgang af kapitel 12.5 og side 817–821 kurver i rummet. Vi fokuserer på kurvers længde og krumning (det sidste kun for kurver i planen). Et par højdepunkter

  – Vektorfunktioner som parameterfremstillinger (man kan forestille sig en vektor, hvis spids med tiden vandrer hen over hele kurven);
  – differentiation og integration af vektorfunktioner;
  – længdeberegning ved integration af farten.
  – naturlig parameterfremstilling;
  – krumning af plane kurver.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

5. gang, tirsdag den 19. september.

- **8.15–8.35:** Repetition naturlig parameterfremstilling, gennemgang af krumning for plane kurver (prøv at læse om det i 12.6 hjemme !).
- **8.35–10.30:** Øvelser i

  Parameterfremstillinger: Lav opgaverne 12.5.1—4 inkl. figurerne !

  Hastighed og acceleration: 12.5.14.

  Integration: 12.5.17 og 12.5.31.

  Regneregler: Lav f.eks. 12.5.23.

  Kurvelængde: Lav 12.6.1 og 12.6.3.

  Krumning af plane kurver: 12.6.11 og 12.6.13–14.

  Enhedstangent og -normal: Regn 12.5.17.

  Tænkeopgave: De hurtige kan regne 12.5.39. (*Vink:* Parameterfremstillingen skal opfylde $\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t) = R^2$, hvor R betegner kuglens radius (hvorfor?). Differentier dette med hensyn til t vha. Thm. 2.(4), p. 806.)

- **10.40–12.00:** Gennemgang af 13.1–2 og 13.4 i [EP] om
  - grafen for en funktion af to variable;
  - niveaukurver og -flader;
  - (lokale) maksima og minima, saddelpunkter (uddybes senere).
  - Partiel differentiation.

  Mens man i gymnasiet analyserer sammenhængen mellem *to* variable størrelser, så skal vi nu finde metoder til at studere sammenhænge mellem *tre eller flere* størrelser. Det vil være nyt for jer, men mange fænomener i fysik, ingeniørvidenskab, kemi og økonomi mm. har netop denne karakter, så det vil være afgørende for jer at kløpå for at lære disse ting.

6. gang, torsdag den 21. september.

- **12.30–12.50:** Repetition og perspektivering.
- **12.50–14.45:** Opgaverne er mange, men ej krævende:

  kurver: Find krumningen af grafen for $\sin x$ både for $x = 0$ og $x = \frac{\pi}{2}$, jævnfør side 20 nederst i [RVC]. (Har forskellen indflydelse på hvor let/svær grafen er at tegne 'pænt' ?)

definitionsmængder: Kapitel 13.2 nr. 14 og 15.

grafer: Nr. 25 og 28 samme steds.

niveaukurver: Nr. 31, 39 (og 43 for de hurtige).

mere om grafer: Nr. 47 og 55. Diskuter i gruppen !

differentiation: Nr. 13.4.5 og 41.

Anvendelse: Lær om varmeudbredelse i 13.4.55.

- **14.55–16.15:** Gennemgang af kapitel 13.5 om *ekstremumsundersøgelser* for funktioner af flere variable.

I semesteroversigten er henvisningerne til de relevante afsnit af [EP]; fra uge 47 læses efter [EJ].

Uge	Dato	Seance	Emner
36	5/9	1	Trigonometriske funktioner og deres inverser (App. C+7.5)
	7/9	2	Inverse afbildninger. Taylorpolynomier (11.4)
37	12/9	3	Taylors formel, Lagranges restled (11.4)
	14/9	4	Kurvelængde. Krumning (12.5–12.6 til s. 821)
38	19/9	5	Funktioner af flere variable, partielle afledte (13.1–2, 13.4)
	21/9	6	Ekstrema for funktioner af flere variable (13.5)
39	28/9	-	
	30/9	-	
40	28/9	-	
	30/9	-	
41	10/10	7	Differentialer og lineær approksimation (13.6)
	12/10	8	Kædereglen. (13.7)
42	17/10	-	efterårsferie
	19/10	9	Retningsafledte. Gradientvektoren (13.8)
43	24/10	10	Afrunding af differentialregning i flere variable.
	25/10	11	Opsamling og opgaver
			Introduktion til integration i flere variable (14.1)
	26/10	12	Integration over områder i planen (14.2)
44	31/10	13	Areal og volumen bestemt ved dobbeltintegraler(14.3)
	2/11	14	Polære koordinater (10.2)
45	7/11	15	Integration i polære koordinater (14.4). Anvendelser(14.5)
	9/11	16	Integration: Eksempler og opsamling
46	16/11	-	
	18/11	-	
47	21/11	17	Komplekse tal
	22/11	18	Rødder i (komplekse) polynomier
	23/11	19	Den komplekse eksponentialfunktion
48	28/11	20	Indledning til differentialligninger
	30/11	21	Lineære andenordens differentialligninger
49	5/12	22	Lineære diff.-ligninger og superposition
	7/12	23	Inhomogene andenordens differentialligninger
50	12/12	24	Afrunding af differentialligninger
	14/12	25	Afslutning af kurset. Opsamling og opgaver

Justeringer kan forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

7. gang, tirsdag den 10. oktober. Denne seance vil yderligere fokusere på den centrale differentialregning. Det er nu en ekstra indsats vil lønne sig !!

- **8.15–8.35:** Repetition om bestemmelse af maksimum og minimum for funktioner af *flere* variable.

- **8.35–10.30:** Her regner I opgaver i

  Partielle afledte: Diskuter 13.4.45–50 i fællesskab!
  Regn dernæst 13.4.41+43.

  Ekstema: 13.5.9, 25, 37 og 47 (*girth* betyder omkreds, vinkelret på længderetningen).

  Ugens nød: 13.5.51, om at producere en stålbøje billigst muligt. *Vink:* Opskriv både voluminet og overfladen som funktion af radius og højden i cylinderen og i keglen. Eliminer den ene ubekendte i den funktion, der giver overfladen; find dernæst minimum for den resulterende funktion af to variable.

- **10.40–12.00:** Forelæsning over kapitel 13.6 i [EP] om *differentialer* og *lineær tilnærmelse*. Side 6+7 og 12+13 i [RVC] omhandler også differentialer — studer figuren side 12 nøje!

  Som vi skal se, kan man ved hjælp af differentialer finde gode tilnærmelser til funktionstilvækster. Selve forståelsen af differentialer er tæt knyttet til begrebet differentiabilitet. Dette vil vi tage op igen, nu for funktioner af n variable; definitionen kommer i formel (19) side 894, bemærk at den kan formuleres med ε-funktioner som i sætningen side 893.

8. gang, torsdag den 12. oktober.

- **12.30–12.50:** Differentialer for funktioner af n variable.

- **12.50–14.45:** Ved opgaveregningen belyses:

  differentialer: Opgave 9, 19 og 25 i kapitel 13.6.

  måleusikkerhed: Opgave 37 i kapitel 13.6.

  Begreber: Konceptopgave nr. 3 side 895 og 48 samt 47, i nævnte rækkefølge. Diskuter sagerne i gruppen !

  Endelig resten af ekstremumsopgaverne fra 8. gang, hvis I har tid til overs.

- **14.55–16.15:** Her gennemgår vi 13.7 om partiel differentiation af sammensatte funktioner. Dette er kendt som *kædereglen*.

Om differentiabilitet i flere variable

Vi har tidligere indført følgende:

Definition 3. *En funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, hvor $I \subset \mathbb{R}$ er et åbent interval, kaldes differentiabel i $x_0 \in I$, hvis der for et passende tal $a \in \mathbb{R}$ er en fremstilling*

$$f(x_0+h) - f(x_0) = ah + \varepsilon(h)h \quad \textit{for} \quad x_0 + h \in I$$

hvor $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0 = \varepsilon(0)$.

Observation: Når f faktisk er differentiabel i x_0 noteres:

(i) Fremstillingen giver $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = a + \varepsilon(h)$ så det er klart at

$$f \text{ er diff. i } x_0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{eksisterer.}$$

Dermed er definitionen ækvivalent med den sædvanlige.

(ii) Det ses af (i) at $a = f'(x_0)$.

(iii) Hvis h substitueres med $x - x_0$ fås alternativt

$$f(x) = f(x_0) + a(x-x_0) + \varepsilon(x-x_0)(x-x_0) \quad \text{for} \quad x \in I. \tag{2}$$

Tangenten igennem $(x_0, f(x_0))$ *defineres* til at være grafen for det førstegrads polynomium, der fås ved at se bort fra restleddet $\varepsilon(x-x_0)(x-x_0)$ på højre side af (2). Et punkt (x,y) ligger altså på tangenten hvis og kun hvis

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0). \tag{3}$$

Differentialet $df(h)$ er den lineære tilnærmelse til funktionstilvæksten, der opnås ved at se bort fra restleddet $\varepsilon(h)h$ i definitionen. Dvs.

$$df(h) = df_{x_0}(h) = ah = f'(x_0)h. \tag{4}$$

For funktionen $x \mapsto x$ bliver dette $dx(h) = 1h$, eller bare $dx = h$ når argumentet h udelades i afbildningen dx; indsættes det fundne $h = dx$ i formlen ovenfor fås $df = f'(x_0)dx = \frac{df}{dx}dx$. Bemærk at for $h \neq 0$ er kvotienten $\frac{df(h)}{dx(h)} = \frac{f'(x_0)h}{1h} = f'(x_0)$, så (differentialkvotienten=) den afledte funktions værdi $f'(x_0)$ *er* faktisk en kvotient mellem differentialer (!) og skrives derfor også $\frac{df}{dx}$ eller $\frac{dy}{dx}$.

I analogi med ovenstående defineres følgende for funktioner af n variable:

Definition 4.*En funktion $f(\vec{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ kaldes* differentiabel *i et indre punkt $\vec{x}_0$ af definitionsmængden $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$, hvis der for en vektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ er en fremstilling*

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) - f(\vec{x}_0) &= \vec{a} \cdot \vec{h} + \varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|, \\ &= a_1h_1 + \cdots + a_nh_n + \varepsilon(\vec{h})\sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2} \end{aligned} \tag{5}$$

hvor $\varepsilon(\vec{h})$ er en epsilonfunktion af n variable, dvs. $\lim_{|\vec{h}|\to 0} \varepsilon(\vec{h}) = 0 = \varepsilon(0)$.

Observation. Når $f(\vec{x})$ faktisk er differentiabel i $\vec{x}_0$ noteres:

(i) For $n = 1$ bliver $|\vec{h}| = |h|$, men man får alligevel samme definition som ovenfor, da man kan opnå h i stedet for $|h|$ ved blot at ændre fortegnet på $\varepsilon(h)$ for $h < 0$. (Resultatet er en ny ε-funktion, som ønsket.)

(ii) Fremstillingen giver for $\vec{h} = h\vec{e}_j$, hvor $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ med tallet 1 alene på j'te plads, at

$$\begin{aligned} f \text{ er diff. i } x_0 \implies & \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{e}_j) - f(\vec{x}_0)}{h} \\ & = \lim_{h\to 0} (\vec{a} \cdot (h\vec{e}_j) + \varepsilon(0, \dots, h, \dots, 0)|h|) = a_j. \end{aligned}$$

Dvs. at den partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ eksisterer i $\vec{x}_0$ og at $a_j = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x}_0)$, for alle $j = 1, \dots, n$. (Jvf. eksempel 6 i kapitel 13.6.)

Vektoren $\vec{a} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) =: \nabla f$ kaldes *gradienten* for f.

(iii) Hvis man for $\vec{x} \in \mathcal{R}$ substituerer $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$ fås alternativt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0)|\vec{x} - \vec{x}_0|. \tag{6}$$

Tangentplanet igennem $(\vec{x}_0, f(x_0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ *defineres* til at være grafen for det førstegrads polynomium, der fås ved at se bort fra restleddet $\varepsilon(\vec{x} - \vec{x}_0)|\vec{x} - \vec{x}_0|$ på højre side af (2). Et punkt $(\vec{x}, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ligger altså på tangentplanet hvis og kun hvis

$$\begin{aligned} z &= f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) \\ &= f(\vec{x}_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)(x_1 - x_{0,1}) + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)(x_n - x_{0,n}). \end{aligned} \tag{7}$$

Differentialet $df(h)$ er den lineære tilnærmelse til funktionstilvæksten, der opnås ved at se bort fra restleddet $\varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|$ i definitionen. Dvs.

$$\begin{aligned} df(\vec{h}) = df_{\vec{x}_0}(\vec{h}) &= \vec{a} \cdot \vec{h} = \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0)h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0)h_n. \end{aligned} \tag{8}$$

(Jvf. bogens eksempel 13.6.5.)

Differentiabilitet i $\vec{x}_0$ kan for en given funktion $f(\vec{x})$ *godtgøres* ved at vise at de partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x})$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})$ alle eksisterer i en kugleformet omegn af $\vec{x}_0$ og at de også er *kontinuerte* i selve punktet $\vec{x}_0$. (Dette er ca. indholdet af sætningen s. 893 i [EP]; med bevis i appendix K.)

Endelig kan man også regne med differentiable funktioner:

Sætning 2. *Hvis $f(\vec{x})$ og $g(\vec{x})$ begge er differentiable i $\vec{x}_0$, som er et indre punkt i begges definitionsmængde, så er funktionerne*

$$\lambda f(\vec{x}), \quad f(\vec{x}) \pm g(\vec{x}),\ f(\vec{x})g(\vec{x}),\ \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} \qquad (\lambda \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

alle differentiable i $\vec{x}_0$; dog for $\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}$ forudsat at $g(\vec{x}_0) \neq 0$.

Bevis: Da f, g er differentiable i $\vec{x}_0$ findes vektorer $\vec{a}$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ og ε-funktioner så

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot \vec{h} + \varepsilon_1(\vec{h})|\vec{h}| \tag{10}$$
$$g(\vec{x}_0 + \vec{h}) = g(\vec{x}_0) + \vec{b} \cdot \vec{h} + \varepsilon_2(\vec{h})|\vec{h}|. \tag{11}$$

Addition hhv. subtraktion heraf giver

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) \pm g(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) \pm g(\vec{x}_0) + (\vec{a} \pm \vec{b}) \cdot \vec{h} + (\varepsilon_1(\vec{h}) \pm \varepsilon_2(\vec{h}))|\vec{h}|. \tag{12}$$

Men da $\varepsilon_1(\vec{h}) \pm \varepsilon_2(\vec{h}) \to 0$ for $\vec{h} \to 0$, så har sidste led formen $\varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|$. Dermed er $f \pm g$ differentiable i $\vec{x}_0$ som ønsket. Tilsvarende ses differentiabiliteten af λf ved at multiplicere ovenstående udtryk for $f(\vec{x})$ med λ. (Gør det!)

For produktet har man fremstillingen, hvori $\vec{x} = \vec{x}_0 + \vec{h}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x})g(\vec{x}) &= (f(\vec{x}_0) + \vec{a} \cdot \vec{h} + \varepsilon_1(\vec{h})|\vec{h}|)(g(\vec{x}_0) + \vec{b} \cdot \vec{h} + \varepsilon_2(\vec{h})|\vec{h}|) \\ &= f(\vec{x}_0)g(\vec{x}_0) + (g(\vec{x}_0)\vec{a} + f(\vec{x}_0)\vec{b}) \cdot \vec{h} + \varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|. \end{aligned} \tag{13}$$

Alle de øvrige led, der fremkommer ved at gange parenteserne sammen, har nemlig den egenskab at de går mod 0, endda selvom de divideres med $|\vec{h}|$ (kontroller det !); de kan derfor slås sammen til et led af formen $\varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|$. Dermed er fg differentiabel i $\vec{x}_0$.

Det er nu nok at behandle $(g(\vec{x}_0))^{-1}$; mere almene funktionsbrøker kan jo skrives $\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = f(\vec{x})\frac{1}{g(\vec{x})}$, som i følge det lige viste om produkter er differentiabel i $\vec{x}_0$ hvis både $f(\vec{x})$ og $\frac{1}{g(\vec{x})}$ er det. For at eftervise differentiabiliteten af $\frac{1}{g(\vec{x})}$ noteres følgende omskrivninger, hvori sidste udtryk er opnået ved addition og subtraktion af størrelsen $(\frac{1}{g(\vec{x}_0)^2}\vec{b}) \cdot \vec{h}$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(\vec{x})} - \frac{1}{g(\vec{x}_0)} &= \frac{g(\vec{x}_0) - g(\vec{x})}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)} = -\frac{\vec{b} \cdot \vec{h} + \varepsilon_2(\vec{h})|\vec{h}|}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)} \\ &= -(\frac{1}{g(\vec{x}_0)^2}\vec{b}) \cdot \vec{h} + |\vec{h}|((\frac{1}{g(\vec{x}_0)} - \frac{1}{g(\vec{x})})\frac{1}{g(\vec{x}_0)}\vec{b} \cdot (\tfrac{1}{|\vec{h}|}\vec{h}) - \frac{\varepsilon_2(\vec{h})}{g(\vec{x})g(\vec{x}_0)}). \end{aligned} \tag{14}$$

Faktoren efter $|\vec{h}|$ går mod 0 for $\vec{h} \to 0$ fordi g er kontinuert i $\vec{x}_0$. Hele dette led har derfor den nødvendige form $\varepsilon(\vec{h})|\vec{h}|$, så differentiabiliteten i $\vec{x}_0$ af $\frac{1}{g(\vec{x})}$ fremgår af fremstillingen ovenfor. Beviset er ført.

Eksempel: Funktionen $\frac{1}{x^2y^3}$ er differentiabel i alle punkter hvor $x \neq 0 \neq y$. Både $(x, y) \mapsto x$ og $(x, y) \mapsto y$ er nemlig differentiable (i henhold til definitionen, hvor man kan bruge nulfunktionen $\varepsilon(h) = 0$). Så i følge sætningens produktregel er også $x^2 = xx$ og $y^3 = yyy$ differentiable; og det er x^2y^3 derfor også. Endelig er kvotienten mellem de differentiable funktioner 1 og x^2y^3 også differentiabel.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Sidste gang fik vi givet en oversigt over differentialer og regnereglerne for differentiabilitet.

Vi også kort omtalt kædereglen for differentiation af sammensatte funktioner. En almen udgave for $\vec{x} \in \mathbb{R}^k$ og $\vec{g}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$ er som følger:

$$\frac{\partial f(\vec{g}(\vec{x}))}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1}(\vec{g}(\vec{x}))\frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\vec{x}) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_n}(\vec{g}(\vec{x}))\frac{\partial g_n}{\partial x_j}(\vec{x}).$$

Formlen *forudsætter* at f og $g_1,\dots,g_n$ alle er *differentiable*.

9. gang, torsdag den 19. oktober. Her vil programmet være lidt atypisk, da vi ikke nåede så langt sidst. Men forsøg så vidt muligt at læse 13.7 inden i kommer til

- **12.30–13.15:** Gennemgang af kædereglen efter kapitel 13.7.
- **13.15–15.20:** Opgaver i

  differentiabilitet: Regn opgave 13.5.43. Er funktionen $f(x, y)$ i opgaven differentiabel i $(0, 0)$?

  kædereglen: Nr. 1, 5, 7 og 15, samt 21, i kapitel 13.7.

  Eksempler: Opgave 37 og 38.

- **15.30–16.15:** Her gennemgås kapitel 13.8 om *retningsafledte* og gradientvektoren $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$, som sammenfatter de partielle afledte af f i ét objekt. Men vil man studere f's ændringer i *andre* retninger end langs koordinatakserne, så har man brug for såkaldte retningsafledte. For differentiable funktioner er der en fin formel, som udtrykker disse via ∇f. Formlen har to gode geometriske konsekvenser:
  - ∇f peger i den retning hvor f vokser hurtigst,
  - ∇f er *normalvektor* til niveaufladerne for f.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

10. gang, tirsdag den 24. oktober.

- **8.15–8.35** Gennemgang af resten af kapitel 13.8.
- **8.35–11.00:** Vi regner opgaver i det nye om

  gradientvektorer: 13.8.5+7;

  retningsafledte: 13.8.11+23+25;

  niveauflader: 13.8.31+33

  geometri: Regn 13.8.53 for at styrke den geometriske forståelse.

  Den ekstra tid til opgaverne er afsat til repetition af det kendte:

  differentialer: Regn 13.6.42. Hvorfor er $S(h, w)$ differentiabel?

  ekstremumsundersøgelser: 13.5.59+60.

  kædereglen: 13.7.25+35.

- **11.15–12.00:** Vi går her igang med kapitel 14.1 om integration af funktioner af (foreløbig) to variable — såkaldte *planintegraler*. Ligesom ved differentialregningen er der stadig mange lighedspunkter med tilfældet med en variabel, men igen bliver det vigtigste nok at forstå forskellene — hvad vil det for eksempel overhovedet sige at integrere en funktion af flere variable ?

  Som vi skal få at se kan man ved 'flerdimensionel' integration typisk udregne arealer og volumener, og vi skal gå en del i dybden med dette tema.

11. gang, onsdag den 25. oktober.

- **8.15–8.30:** Introduktion til prøveopgaverne.
- **8.30–12.00:** Her behandler I prøveopgaverne 2, 3, A og B under vejledning fra hjælpelærerne og undertegnede.

12. gang, torsdag den 26. oktober.

- **12.30–13.15:** Mere om integration af funktioner på rektangler og mere generelle områder.
- **13.15–15.20:** Planintegraler belyses gennem opgaverne i

  Riemannsummer: 14.1.5.

Dobbeltintegraler: 14.1.13+23.

Ombytning: 14.1.31+32.

Uligheder: 14.1.37.

Er der tid til overs kan man se på de gamle opgaver eller prøveopgaverne fra 25/10.

- **15.30–16.15:** Her gennemgår vi resten af afsnit 14.2 om planintegraler over områder, der er mere generelle end rektangler. Dette er relevant for rumfangsbestemmelse for kugler o.m.a. Selve integrationsopgaven (finde stamfunktioner to gange i træk) forbliver lige nem; det er ofte mere vanskeligt at finde og beskrive det plane definitionsområde som et simpelt område (med variable grænser).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi nåede igår at gennemgå afsnit 14.2, dog pånær begrebet *simple områder*. I bedes selv læse om dette inden næste gang.

13. gang, tirsdag den 31. oktober.

- **8.15-8.35:** Repetition og perspektivering.
- **8.35–10.30:**

  x**-** y**-simple områder:** Diskuter punkt 1+2 af konceptopgaven side 952.

  Dobbeltintegraler: Regn opgaverne 14.2.3+7+12.

  Planintegraler: Belyses gennem 14.2.15+21.

  Ombytning af integrationsorden: Regn 14.2.28+31+33 (*meget* illustrative!).

  Evt. kan I se mere på prøveopgaverne, hvis der er tid til overs.
- **10.40–12.00:** Her gennemgås kapitel 14.3, hvor vi skal se nærmere på volumener.

14. gang, torsdag den 2. november.

- **12.30–13.15:** Vi tager her en afstikker til kapitel 10.2 for at blive fortrolige med *polære koordinater*. Disse vil senere blive til stor hjælp også ved udregning af planintegraler.
- **13.15–15.20:** Først går vi igang med 14.2.41–44. Hensigten er at man skal vente med at bestemme stamfunktioner til integralet er reduceret mest muligt — der er flere muligheder, så diskuter i *fællesskab*.

  Dernæst opgaverne 14.3.5, 19, 27 og 29.
- **15.30–16.15:** Her gennemgås resten af afsnit 10.2.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

15. gang, tirsdag den 7. november.

- **8.15–8.35:** Repetition og perspektivering om polære koordinater.
- **8.35–10.30:** Regn først følgende om
  - **areal og volumen:** (I) Find arealet af cirklen med radius $r > 0$ og centrum i origo (udregn planintegral af den konstante funktion 1). NB ! Integraltabeller oplyser at
  $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \tfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{a^2}{2} \arcsin \tfrac{x}{a}. \tag{15}$$
  (…endnu en motivation for arcusfunktioner.) (II) Bestem volumenet af en kugle med radius $r > 0$, ved at fastlægge en graf ud fra $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

  Udi de polære koordinater kan I dygtiggøre jer ved at se på
  - **omregninger:** via opg. 10.2.1+2+5+7;
  - **polære ligninger:** opg. 10.2.11+13+19+21;
  - **kurver:** Lær om en limacon ved at regne 10.2.33–36.
- **10.40–12.00:** Emnet er her planintegraler i *polære koordinater*, dvs. kapitel 14.4. Mere præcist kan man lave en substitution og opskrive integralet i polære koordinater (der er både forskelle fra og ligheder med det I kender om substitution ifm. funktioner af en variabel). Som vi skal få at se kan dette være en umådelig stor fordel, hvis integrationsområdet involverer cirkelbuer. Hensigten er også at sige lidt om rumintegraler, jvf. 14.6.

16. gang, torsdag den 9. november.

- **12.30–12.50:** Vi mødes i aud. 1 til en optakt til dagens program.
- **12.50–16.15:** Som træning i at regne planintegraler ud vha. polære koordinater kan I se på opgaverne 14.4.3+9+17 og 29.

  Dernæst kan I regne prøveopgaverne 1, 5 og 6. Gør et helhjertet forsøg på at regne disse hjemmefra, så tiden/vejledningen kan udnyttes *bedst muligt*.

NB !. Fra den 21/11 skal vi benytte en ny bog (her betegnet [EJ]), nemlig: “Helge Elbrønd Jensen et al., *Matematisk Analyse I*, DTU” med tilhørende opgavesamling.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Undervejs i gennemgangen af kapitel 14 har vi som hovedeksempler behandlet hvordan man ved integration kan bestemme den totale masse, massemidtpunkt og inertimomenter for en plan massefordeling. Jævnfør eksemplerne 14.5.1+10 og formlerne (1)–(6) der.

Vi har også set som en generel regel, at *længde, areal, volumen* kan bestemmes ved at integrere den konstante funktion 1:

$$L = \int_a^b 1\,dx, \qquad A = \iint_R 1\,dA, \qquad V = \iiint_T 1\,dV. \tag{16}$$

17. gang, tirsdag den 21. november. Her vil vi dels afrunde vores gennemgang af integration i flere variable; dels begynde på komplekse tal.

- **8.15–8.45:** Her gives en kort oversigt over kapitel 14.6 om rumintegraler: Vi fokuserer på forskelle og ligheder i forhold til planintegraler, for at opnå både lidt repetition og en afrunding.
- **8.45–10.30:** Øvelserne tages i følgende emner,
  - **Rumintegraler:** Regn opgave 14.6.45.
  - **x-, y- og z-simpel:** Diskuter i fællesskab Example 14.6.4 og navnlig hvordan integrationsgrænserne i de 3 løsningsforslag side 983 fremkommer. Verificer ved udregning af et integral at $\bar{y} = 0$ som påstået.
  - **Integration i polære koordinater:** Regn prøveopgave C.

  Endelig kan I regne gamle opgaver, hvis der er tid til overs.
- **10.40–12.00:** Her gennemgås komplekse tal efter kapitel 4.2 i [EJ]. I bedes læse på forhånd i kapitel 4.1 om polære koordinater (det kunne jo være det ville være godt læse om det på dansk også. . .).

18. gang, onsdag den 22. november. Bemærk tid og sted ! (Auditorium 3.)

Forbered dig hjemmefra ved at bruge følgende stikord til **selvoverhøring:** *Komplekse tals addition og multiplikation, identifikation af de reelle tal, den imaginære enhed, real- og imaginærdel, regneregler for komplekse tal, modulus og argument, komplekst konjugerede tal.*

- **8.15–8.35:** Repetition og perspektivering om komplekse tal.
- **8.35–10.30:** Opgaverne tager vi fra opgavehæftet til [EJ].
  - **Aritmetik:** Lav opgaverne nr. 401, 403, 405.

- **Geometriske forhold:** Diskuter nr. 414 i fællesskab i gruppen.
- **Modulus og argument:** Regn nr. 406, 407, 411, 412 og 413.

  Diskuter i fællesskab opgave 422,(a)+(b), og vær sikre på at alle i gruppen har forstået dem. De entusiastiske laver også nr. 423.

- **10.40–12.00:** Her gennemgår vi afsnit 4.3 i [EJ], og vi skal opnå et nyt syn på rødder i polynomier. F.eks. skal vi se at $x^2 + 1 = 0$ har to komplekse rødder, og mere generelt har ethvert polynomium af grad n **præcis** n rødder (dette er kendt som *algebraens fundamentalsætning*). Selvom disse n rødder kan være komplekse, er dette alligevel en særdeles bekvem information (som vi skal se senere ved differentialligningerne).

  Ved gennemlæsningen af kapitel 4.3 i [EJ] om komplekse polynomier, bør I fokusere på det *nye*: antallet af rødder er *lig* med polynomiets grad, polynomiers division kan laves nu ved regning med komplekse tal, andengradsligninger har nu altid to rødder, men istedet for kvadratroden af diskriminanten indgår en løsning til den *binome* ligning $w^2 = D$; endelig løses $z^n = a$ nu let ved regning med modulus og argument. Osv.

19. gang, torsdag den 23. november. Vi stiler mod at indføre den *komplekse eksponentialfunktion* som

$$\exp(x + \mathrm{i}\, y) = e^{x+\mathrm{i}\, y} := e^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y). \tag{17}$$

Hermed er $|e^{\mathrm{i}\, y}| = 1$ for alle $y \in \mathbb{R}$. (Hvorfor?) Når $a \in \mathbb{C}$ har modulus r og v som argument skrives $a = r_v$ i [EJ], men I bør allerede nu vænne jer til den mere almindelige notation

$$a = re^{\mathrm{i}\, v}. \tag{18}$$

Bemærk at gode gamle $\cos$ og $\sin$ nu er tæt forbundne med $\exp$. Dette går igen i de Moivres og Eulers berømte formler (jvf. (4.33), (4.40) og (4.41) i [EJ]):

$$(\cos x + \mathrm{i} \sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i} \sin(nx), \quad \text{dvs. } (e^{\mathrm{i}\, x})^n = e^{\mathrm{i}\, nx},$$
$$\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{\mathrm{i}\, x} + e^{-\mathrm{i}\, x})$$
$$\sin x = \tfrac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}\, x} - e^{-\mathrm{i}\, x}).$$

- **12.30–13.15:** Her afrundes kapitel 4.3 og vi fortsætter med 4.4 om $e^{x+\mathrm{i}\, y}$.
- **13.15–15.20:** Som træning tager vi opgaver i:

  basal regning: Opgave 410 og 411.

  binome ligninger: Opgave 430 først, dernæst nr. 427.

  andengradsligninger: Nr. 424 og 425.

  tabelværdier for cosinus og sinus: For at finde $\cos \frac{\pi}{12}$ gøres følgende:

  - Skriv $e^{\mathrm{i}\, \pi/12} = 1_{\pi/12}$ vha. $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$.

- Kontroller at $z = e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$ løser

  $$z^2 = e^{\mathrm{i}\,\pi/6}.$$

- Løs ligningen ved at bruge sætning 4.4 i [EJ], og verificer dernæst at

  $$\cos(\pi/12) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}), \quad \sin(\pi/12) = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

- **15.30–16.15:** Her tager vi resten af kapitel 4.4 om den komplekse eksponentialfunktion; og runder hele emnet komplekse tal af.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

20. gang, tirsdag den 28. november.

- **8.15–8.35:** Repetition og perspektivering fra sidst.
- **8.35–10.30:** Her regner vi opgaver i

  polynomier: Nr. 432 og 434. (Hvor stor hjælp giver de komplekse tal ?)

  den komplekse eksponentialfunktion: 436 (ej Mapledelen) og 438 (*vink:* antag det modsatte, og brug at 0 er det eneste tal med modulus 0).

  Eulers og Moivres formler: 439 (1. del) og 441.

  Tabelværdier: Regn først opgaven om $\cos(\pi/12)$ og $\sin(\pi/12)$ fra sidste gang.
  De hurtige tager dernæst opgave 475 for at finde $\cos(\pi/5)$ og $\cos(3\pi/5)$. Facit er

  $$\cos(\pi/5) = \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5}), \qquad \cos(3\pi/5) = \tfrac{1}{4}(1-\sqrt{5})$$

- **10.40–12.00:** Vi gør først afsnit 4.4 færdigt; det vigtigste er at vise at den *komplekse* funktion $t \mapsto e^{Rt}$, hvor $R \in \mathbb{C}$ er en kompleks konstant, er *differentiabel*.

  Dernæst begynder vi på kursets sidste emne, *differentialligninger*, og vi lægger ud med afsnit 1.3 i [EJ] om lineære differentialligninger af første orden.

21. gang, torsdag den 30. november.

- **12.30–13.15:** Her gennemgås først resten af kapitel 1.5 i [EJ] om *lineære* differentialligninger af første orden. Dernæst tager vi, for at kunne sammenligne, afsnit 1.2 om visse typer af *ikke-lineære* ligninger.
- **13.15–15.20:** Opgaveprogrammet er
  - **Komplekse tal:** Regn opgaverne 441 og 475 (et facit ses under 28/11).
  - **Differentialligninger af 1. orden:** Regn 108–110 i [EJ].
  - **Separation af de variable:** Regn nr. 102.
- **15.30–16.15:** Vi fortsætter med differentialligningerne, nu med andenordenstilfældet efter kapitel 5.1–5.2 i [EJ].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vedrørende eksamen i januar kan man finde pensum på nettet under:

`http://www.tnb.aau.dk/stud_info/eksamen/.`

22. gang, tirsdag den 5. december.

- **8.15–8.35:** Repetition og perspektivering; vi fokuserer på sætning 5.3, som vi ikke nåede at formulere sidste gang.
- **8.35–10.30:** Opgavernes emner er
  - **Eksistens- og entydighedssætningen:** Diskuter opgaverne 501–502 grundigt, så alle i gruppen er med på konklusionerne.
  - **Homogene ligninger:** Regn 503–508 i [EJ].
  - **Begyndelsesværdiproblemer:** Læs og regn nr. 509. Bemærk at det er andre aspekter der fokuseres på end den fuldstændige løsning.

    Ekstra: hvad udsiger sætn. 5.1 om løsningen $\varphi_c(t)$ [når c er et fast tal] ?
- **10.40–12.00:** Vi gør først afsnit 5.2 færdigt, med hovedvægt på at forstå tilfældet med *komplekse* rødder i karakterligningen.

  Desuden påbegyndes afsnit 5.3 i [EJ] om *inhomogene* andenordens differentialligninger med konstante koefficienter. Vi skal blandt andet møde *lineære afbildninger* — så **repeter** det abstrakte begreb *afbildning* fra oversigt nr. 2 !

23. gang, torsdag den 7. december.

- **12.30–13.15:** Her gennemgås resten af kapitel 5.3 i [EJ].
- **13.15–15.20:** Ved opgaveregningen belyses:

  linearitet i opgave 510 (find en passende lineær afbildning, og find diverse funktioner den sender i 0; og brug sætning 5.4).
  Vis ved håndkraft, at $L(f) = f'(t) + p(t)f(t)$ er en lineær afbildning.
  Gør det samme med $L(f) = f''(t) + a_1 f'(t) + a_0 f(t)$.

  dobbeltrodstilfældet i nr. H88,(1)–(3), på side 99–100 i opgavehæftet.

  inhomogene ligninger ved *gættemetoden* i opgave 512, 513 og 514.
  Bemærk at man til inhomogene ligninger skal benytte sætning 5.4 (2), og derfor *gætte* en enkelt (dvs. partikulær) løsning — dette gøres ved for eksempel i opgave 513 at ansætte $x(t) = a + bt + ct^2 + dt^3$ og så bestemme $a, \ldots, d$ ved at indsætte i differentialligningen (generelt: Gæt på en funktion der ligner højresiden i differentialligningen).
- **15.30–16.15:** Vi fortsætter med 5.4 om de inhomogene ligninger og *superpositionsprincippet*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

24. gang, tirsdag den 12. december.

- **8.15–8.35:** Her perspektiveres gennemgangen af differentialligningerne med eksempler på gættemetoden og komplekse løsninger, jvf. Eksempel 5.7.
- **8.35–11.00:** NB ! Vi har sat ekstra tid af til øvelserne.

  Vi træner i at løse inhomogene ligninger vha:

  - **gættemetoden:** opgave 512, 515(regn komplekst), 516(regn komplekst);
  - **superpositionsprincippet:** opgave 517, 518, 519.

  Endelig regnes gamle opgaver, hvis der er tid til overs.
- **11.15–12.00** Vi mødes i auditoriet til opsamling omkring differentialligninger.

25. gang, torsdag den 14. december.

- **12.30–13.15:** Her gives en introduktion til prøveopgaverne 7, 8 og D.
- **13.15–16.15:** Vi beskæftiger os med de sidste prøveopgaver, som er nr. 7 (om komplekse tal) og 8 (om differentialligninger) samt den fagrelevante prøveopgave D (om differentialligninger af 1. orden).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I *Matematisk regne- og præsentationsteknik 1* (MR1) tages udgangspunkt i prøveopgaverne 1–3, 5–8 og A–D. Disse findes på nettet.

Vi udnytter tiden til at træne jer i *problemløsning, ræsonnering og mundtlig fremstilling* efter følgende program:

Onsdag 3. januar Prøveopg. 1+2+3 før middag, dernæst nr. 5+6+7.

Torsdag 4. januar Prøveopg. A+B/C før middag, dernæst nr. 8+D.

Fredag 5. januar Afklaring af de sidste spørgsmål i alle opgaverne.

Dagsprogrammerne for onsdag, torsdag og fredag bliver nogenlunde således:

- **8.15–9.00:** I diskuterer den første opgave i grupperne.
- **9.00-9.45:** Samling i auditorium 1 til oplæg og almen information.
- **9.45–12.00:** I grupperummene arbejder I med de næste prøveopgaver.
- **12.30–15.30:** I fortsætter med de næste opgaver iht. oversigten.
- **15.30–16.15:** Afrunding i auditorium 1 af fælles problemer med emnerne (kan aflyses hvis der ej er behov).

Obs ! Det er vigtigt for jeres præsentationer at kæde teorien og praktikken sammen, dvs. at besvare teorispørgsmålet undervejs (om muligt). Derfor skal I i grupperne diskutere

- **hvilke** dele af teorien, der kan inddrages, og
- **hvornår** teorien med fordel kan gennemgås.

Derved kan jeres præsentationer give et langt bedre overblik.

Obs ! Obs !! For at disse diskussioner kan gennemføres i grupperne (i den begrænsede tid vi har til rådighed), så er det en stor fordel, hvis alle så vidt muligt har *regnet* opgaverne, inden vi begynder den 3/1 !

Notabene ! Hjælpelærerne står til rådighed i tidsrummet 10–12 og 13–15. Brug dem mens de er der !!

Med venlig hilsen
Jon Johnsen