Oversigt nr. 1

I PE-kurset i skal vi bruge

[A] Sheldon Axler: "Linear algebra done right´´, 2nd ed., Springer.

[AB] K. G. Andersson og L.-C. Böiers: "Ordinära differentialekvationer".

Groft sagt begynder vi med at gennemgå kapitel 1–3, 5–7 i [A] i løbet af de første 10 seancer.

I kan med fordel læse til og med side 8 i [A] som forberedelse til første gang.

1. gang, torsdag den 4. september.

- **8.15–9.00:** Vi tager hul på [A] og stiler mod at nå "Subspaces" i kapitel 1.
- **9.00–11.00:** Her er programmet opgaveregning:

  Kapitalformlen: Bevis ved induktion efter n, at den simple differensligning $K_{n+1} = (1+r)K_n$ (hvor r betegner rentefoden, f.eks. $r = 0,07$ ved 7% p.a.) har løsningen
  $$K_n = (1+r)^n K_0. \qquad (1)$$
  Hvis man som 20-årig anbringer 10000kr. til 10% p.a, hvad er så K_{14} ? (Mange køber hus når de er 35-40.) Og K_{40} ? (mange køber sommerhus, når de er 60.)
  Hvad får man, circa, ved at placere 10000kr. til 10% p.a. hvert år som 20–24 årig ? K_{14} ? K_{40} ?

  Iteration: Man kan bestemme $\sqrt{2}$ f.eks. ved at indføre $f(x) = \sqrt{x}$ og løse
  $$x_{k+1} = x_k + f'(x_k)^{-1}(f(x_k) - f(x_{k-1})), \qquad (2)$$
  Prøv at indsætte $x_0 = 1,4$ og $x_1 = 1,41$ osv.

  Om $\mathbb{C}$: Regn 1.1+2 i [A].

  Om vektorrum: Regn 1.3 i [A].

  Om underrum: Lav 1.5–8 i [A].

- **11.15–12.00:** Her gennemgår vi resten af Kapitel 1 om *sum* af underrum.

2. gang, fredag den 5. september.

- **8.15–9.00:** Vi begynder på kapitel 2 og stiler mod at nå 2.6.
- **9.00–11.00:** Programmet er resten af opgaverne til kapitel 1 i [A].
- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 2 i [A], til og med 2.17.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 2 frem til Prop. 2.7. Desuden så vi indgående på følgende **hovedeksempel**: Lad $F(M, \mathbb{L}^n)$ betegne mængden af afbildninger $f\colon M \to \mathbb{L}^n$, hvorved M er en given vilkårlig mængde. Da er $V = F(M, \mathbb{L}^n)$ er selv et vektorrum over $\mathbb{L}$ med de *punktvise* kompositioner:

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m); \qquad (a \cdot f)(m) = a \cdot f(m).$$

For eksempel er $F(M, \mathbb{L}) = \mathbb{C}^k$ når man tager $M = \{1, 2, ..., k\}$ og $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ =den komplekse plan, idet $f \in F(M, \mathbb{L})$ da har sin værdimængde $f(\{1, 2, \dots, k\})$ organiseret som $(z_1, z_2 \dots, z_k)$. (Dette er den præcise definition af et par (z_1, z_2), et tripel (z_1, z_2, z_3) eller et generelt k-tupel $(z_1, z_2, \dots, z_k)$.)

Desuden fås eksemplet fra [A] med $\mathbb{L}^\infty$ som $F(\mathbb{N}, \mathbb{L})$ — overvej hvorfor ! Dette er nyttigt i forbindelse med

Den storplettede ugle: (Repeter dette eksempel fra indledningen til kapitel 5 i Lays bog.) Tilstandsvektorerne $\vec{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$ kan bekvemt anses for at ligge i $\mathbb{C}^3$ pga. komplekse egenværdier for matricen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{pmatrix}$. Her er A lig koefficientmatricen i det diskrete dynamiske system

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k, \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0.$$

En *løsning* $\vec{x}_k$ hertil er faktisk et element i $F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$, som er et komplekst vektorrum, jævnfør ovenfor. Eksemplet tages op ved næste forelæsning.

3. gang, tirsdag den 9. september. Foruden ovenstående er programmet:

- **8.15–9.00:** Gennemgangen af [A] fortsætter med begrebet *basis* — repeter dette fra basis (hø-høh!) — fra afsnit 2.8, og vi når nok til og med 2.13. Undervejs vil lemma 2.4 spille en afgørende rolle (som i beviset for theorem 2.6), så sørg for at du/I har forstået dette lemma før forelæsningen.

- **9.00-11.00:** Opgaverne bliver her følgende:

  Almene vektorrum: Lad $F(M, U)$ være mængden af afbildninger $f\colon M \to U$, hvorved M er en vilkårlig mængde og U er et givet vektorrum over $\mathbb{L}$. Eftervis da at $V = F(M, U)$ er et vektorrum over $\mathbb{L}$.

  Sum af underrum: Regn opg. 1.14 og 1.15.

  Frembringersæt: Lav opg. 2.1.

  Lineær uafhængighed: Regn opg. 2.2+3.

  Endelig dimension: Gennemsku opg. 2.5 !

- **11.15–12.00:** Vi fortsættet her med resten af kapitel 2, hvor vi skal beskæftige os med begrebet *dimension* på en seriøs måde.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

4. gang, fredag den 12. september.

- **8.15–9.00:** Vi gennemgår resten af kapitel 2 i [A]; fra og med dimension. Måske når vi også lidt fra kapitel 3 om lineære afbildninger (også kaldet *operatorer*).

- **9.00–11.00:** Ved øvelserne regnes opgaver om:

  Grundbegreber: Lad $U \subset \mathbb{R}^3$ bestå af de vektorer (x, y, z), som for passende $s, t \in \mathbb{R}$ opfylder

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

  Find et *frembringersæt* for U. Bestem et lineært *uafhængigt* sæt i U. Angiv en *basis* B for U, og bestem *koordinaterne* for $u = (3, 2, 11)$ mht. denne basis.

  Suppler B til en basis B' for $\mathbb{R}^3$. Angiv koordinaterne for u mht. B'.

  Hvad er $\dim U$? Er dette en modstrid med at u er et tripel ?

  Udtynding: *Udtynd* sættet $((1, 1), (2, -3), (3, -2))$ til en basis for det komplekse rum $\mathbb{C}^2$. (Overvej hvorfor du/I fik et frembringersæt for $\mathbb{C}^2$.)

  Kan sættet

  $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  udtyndes til en basis for $\mathbb{C}^3$?

  Polynomier: Vis at $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ er et underrum af $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Godtgør at polynomierne, for fastholdt $a \in \mathbb{R}$,

  $$(1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^m) \tag{3}$$

  er et frembringersæt for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. (*Vink:* Brug Taylors formel.) Vis også at sættet er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.

  Direkte sum: Lav 2.10+13+17.

  (U)endelig dimension: Regn 2.5+7+6.

- **11.15–12.00:** Her tager vi så stor en bid som muligt af kapitel 3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi nåede idag til og med s. 47. Dog blev beviset for Prop. 2.19 overladt til selvstudium. Forslaget er at I skriver det ret verbale bevis i bogen ud i alle detaljer. Vælg f.eks. en basis for underrrummet U_j til at hedde

$$(u_1^{(j)}, u_2^{(j)}, \dots, u_{n_j}^{(j)}), \quad \text{for} \quad n_j = \dim U_j.$$

Udfyld så alle detaljer vha. dette !

I kapitel 3 bør I se grundigt på eksemplerne — forstå hvorfor afbildningerne er lineære. Eftervis også at $T\colon V \to W$ er lineær netop når $T(au+bv) = aTu+bTv$ for alle skalarer a, b i $\mathbb{L}$ og alle vektorer $u, v \in V$.

5. gang, tirsdag den 16. september.

- **8.15–9.00:** Vi fortætter med kapitel 3 om lineære afbildinger og matricer.
- **9.00–11.00:** Opgaveregningen fokuserer på:

  Billedrum: Giv dit eget bevis for at billedmængden for en lineær afbilding er et underrum.

  Linearitet: Verificer påstanden s. 41 øverst at ST er lineær. Godtgør også påstandene om surjektivitet midt på s. 44.

  Regn endelig opgave 3.2+3+5.

  Dimensionssætningen: 3.9+11+12.

  En udfordring: Regn 3.16. (Hvorfor må uligheden i opgaven forventes?)

  Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her gør vi kapitel 3 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi nåede idag til og med Theorem 3.18, idet vi som en vigtig konsekvens af Proposition 3.14 så på *koordinattransformationer:*

Når et vektorrum V har to baser $B = (v_1, \dots, v_n)$ og $\hat{B} = (\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_n)$, så kan enhver vektor $v \in V$ skrives på to måder:

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \hat{a}_1 \hat{v}_1 + \cdots + \hat{a}_n \hat{v}_n. \tag{4}$$

Dette giver i første omgang to forskellige koordinatsøjler for v, nemlig

$$\mathcal{M}(v, B) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}(v, \hat{B}) = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \vdots \\ \hat{a}_n \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Kendes blot den ene kan den anden bestemmes ved hjælp af koordinatransformationsmatricen S, idet

$$\mathcal{M}(v, \hat{B}) = S \cdot \mathcal{M}(v, B). \tag{6}$$

Her er $S = \mathcal{M}(I, B, \hat{B})$ når $I \colon V \to V$ betegner den identiske afbildning, og selve formlen (6) følger direkte af Proposition 3.14, når denne bruges på I.

Eksempelvis har $v = (4, 2)$ koordinatsøjlen $\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ mht. den naturlige basis $E = (e_1, e_2)$; desuden kunne man indføre basen $\hat{E} = (\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, hvor $\hat{e}_1 = (1, 1)$, $\hat{e}_2 = (-1, 1)$. Idet

$$e_1 = -\tfrac{1}{2}\hat{e}_1 + \tfrac{1}{2}\hat{e}_2, \qquad e_2 = \tfrac{1}{2}\hat{e}_1 + \tfrac{1}{2}\hat{e}_2, \tag{7}$$

sluttes (af side 48 i [A]) at $S = \mathcal{M}(I, E, \hat{E}) = \left(\begin{smallmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$, hvorfor (6) giver

$$\mathcal{M}(v, (\hat{e}_1, \hat{e}_2)) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

6. gang, torsdag den 18. september.

- **8.15–9.00:** Først gøres kapitel 3 færdigt. Dernæst tager vi hul på kapitel 5 om egenværdier og egenvektorer. Disse begreber mødte I på basis, men de er (som antydet) vigtige for os på MAT 1. Desuden skal I møde invariante underrum: Hvis $T \in \mathcal{L}(V)$, så kaldes et underrum $U \subset V$ *invariant* ved T, hvis $T(U) \subset U$.

- **9.00-11.00:** Opgaver i flg. emner:

Matricer: Find $w = T(1,1)$, når T er som på side 49 i [A]. Bestem dernæst $\mathcal{M}(w)$ ved at bruge matrixregning. Indfør nu basen $B = ((2,0),(1,-1))$ for $\mathbb{L}^2$ foruden den naturlige basis E for $\mathbb{L}^3$. Hvad er da $\mathcal{M}(1,1)$ og $\mathcal{M}(T;B,E)$? Brug disse til at bestemme $\mathcal{M}(w)$.

Lav 3.19.

Isomorfe rum: Regn 3.20 og se sammenhængen !

Dimensionssætningen: Regn 3.26+10.

Inverterbarhed: Vis at hvis $T \in \mathcal{L}(V)$ er inverterbar, så har matricen $\mathcal{M}(T)$ (mht. en fast valgt basis for V) en invers *matrix* og

$$\mathcal{M}(T)^{-1} = \mathcal{M}(T^{-1}). \tag{9}$$

Formuler og bevis et omvendt resultat hertil ! Anvendelse: I (6) er matricen S inverterbar (hvorfor?).

Desuden: Gennemsku 3.22. Og den overraskende 3.23.

Injektiv: Lav 3.14 (brug opgave 3.3 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *højreinvers* er !?

Surjektiv: Lav 3.15 (brug opgave 3.8 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *venstreinvers* er !?

- **11.15–12.00:** Her fortsættes frem mod Theorem 5.13.

Den storplettede ugle: I forbindelse med differensligningen (jvf. Lays bog kap. 5)

$$\vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{10}$$

kan man indføre $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots)$, som er element i det tidligere indførte vektorrum $V = F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$. Da udgør løsningerne et *underrum* $U \subset V$: Dvs., for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ og alle løsninger x, y fås en ny løsning $z \in V$, nemlig

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda\vec{x}_0 + \mu\vec{y}_0, \dots, \lambda\vec{x}_k + \mu\vec{y}_k, \dots).$$

Thi $\mathcal{A}x = (A\vec{x}_0, \dots, A\vec{x}_k, \dots)$ definerer en lineær afbildning $\mathcal{A}\colon V \to V$; desuden rummer $\mathcal{L}(V)$ skifteoperatoren $Sx = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_{k+1}, \dots)$, jvf. side 39 i [A], så ligningen er ækvivalent med $Sx = \mathcal{A}x$ og derfor med

$$(S - \mathcal{A})x = 0 \quad \text{eller} \quad x \in \mathrm{Null}(S - \mathcal{A}). \tag{11}$$

Af disse grunde siges differensligningen at være *lineær*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Som I har bemærket, springer vi kapitel 4 over. Dette skyldes især, at vi alligevel ikke kan overkomme at bevise algebraens fundamentalsætning (4.7) på dette semester. (I vil senere på MAT 2 se et smart bevis, der ikke bruger lineær algebra.)

Man kan dog med fordel orientere sig om indholdet af kapitel 4. En god indgangsvinkel kunne være Korollar 4.8, som vi idag har brugt direkte i beviset for Theorem 5.10. Indse dette (!) og prøv så at følge beviset for Korollar 4.8, dvs. for at korollaret er en konsekvens af algebraens fundamentalsætning 4.7.

7. gang, fredag den 19. september.

- **8.15–9.00:** Vi stiler mod at nå Prop. 5.18.
- **9.00–11.00:** Opgaver i:

  Polynomier af operatorer: Vis påstanden side 80_7 i [A]. Eftervis dernæst den helt afgørende formel side 81^1 at

  $$(pq)(T) = p(T) \cdot q(T). \tag{12}$$

  Den storplettede ugle: Indse først, at der til hvert $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ findes et og kun et $x = (\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k, \dots) \in F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$ som opfylder

  $$\begin{cases} \vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \vec{x}_0 = \vec{v}. \end{cases} \tag{13}$$

  Vink: Man kan vise enhver løsning nødvendigvis har formen $x = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$; og omvendt at denne vektorfølge faktisk løser begyndelsesværdiproblemet ovenfor.

  Med andre ord er $\Phi(\vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$ en bijektion af $\mathbb{C}^3$ på løsningsmængden, kaldet X, til selve *differens*ligningen.

  Vis at Φ er en isomorfi $\mathbb{C}^3 \to X$, samt at $\dim X = 3$. (NB ! Theorem 3.18 i [A] kan ikke bruges som den står; men brug forbemærkningen til den).

  Invariante underrum: Lav opg. 5.1 og 5.4.

  Egenværdier: Regn 5.10.

  Egenvektorer: Regn 5.5 og 5.6.

  Eventuelt gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Resten af kapitel 5 frem til side 90. Desuden når vi måske lidt af kapitel 6 om indre produkter (=skalarprodukter).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi nåede sidste gang til og med Proposition 5.20 om egenværdier.

8. gang, tirsdag den 25. september.

- **12.30–13.15:** Først runder vi kapitel 5 af med gennemgang af 5.21. Generelt siges en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ at være *diagonaliserbar* hvis den opfylder en (og dermed enhver) af de ækvivalente betingelser i 5.21. NB !

  Dernæst fortsætter vi med kapitel 6. Vi vil gå let hen over de første 2–4 sider, som I med fordel kan læse inden forelæsningen.

- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Diagonalisering: Find samtlige egenværdier og -vektorer for

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

  Brug Sætning 5.21 til at afgøre, om matricerne er diagonaliserbare.

  Den storplettede ugle: Vis at A er diagonaliserbar når

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

  (Find dens karakteristiske polynomium ved håndkraft, siden rødderne (evt. ved maskinkraft) og bestem egenværdierne. Konkluder så!)

  Udled at der findes $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{C}^3$ så enhver begyndelsesvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^3$ på entydig måde kan skrives

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3.$$

  Bevis at der for enhver løsning $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots)$ til differensligningen $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ gælder

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= c_1A^k\vec{u}_1 + c_2A^k\vec{u}_2 + c_3A^k\vec{u}_3 \\ &= c_1\lambda_1^k\vec{u}_1 + c_2\lambda_2^k\vec{u}_2 + c_3\lambda_3^k\vec{u}_3, \end{aligned} \tag{14}$$

  for komplekse skalarer $\lambda_1 \approx 0,98$, $\lambda_2 \approx -0,2 + \mathrm{i}\,0,21$ og $\lambda_3 \approx -0,2 - \mathrm{i}\,0,21$. Brug egenskaberne ved en *norm* til at udlede at

$$\|\vec{x}_k\|_{\mathbb{C}^3} \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{15}$$

  Hvad betyder dette for uglebestanden ?

Egenværdier og -vektorer: Regn opgave 5.8 og 5.7.

Øvre trekantsmatricer: Regn opgave 5.17.

- **15.30–16.15:** Her stiler vi mod at nå 6.25.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

9. gang, fredag den 26. september.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med kapitel 6 fra side 103 til 111.
- **9.00–11.00:** Opgaver i emnerne:

  Egenværdier: Regn 5.23. Evt. 5.20.

  Cauchy–Schwarz: Lav 6.3.

  Indre produkter: Regn 6.6+7.

  Gamle opgaver der efter.
- **11.15–12.00:** Vi gennemgår kapitel 6 til side 119 ca.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Vi nåede idag frem til side 113 øverst, idet selv må læse beviset for 6.29, mens Korollar 6.30 blev udskudt til næste gang.

10. gang, tirsdag den 30.september.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med kapitel 6 og stiler videre mod 6.45 — side 114-116 nævnes kun kortfattet men de er faktisk ret interessante, læs dem og lær om din lommeregner !

- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Koordinater: Find koordinaterne for $(1, -1, 0, 2)$ med hensyn til den ortonormale basis for $\mathbb{R}^4$, der står side 107.(Nem!)

  Ortonormal: Afgør om vektorerne $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ og $(1, 0, 0)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$.(Nem!)

  Brug Gram–Schmidt ortogonalisering til at finde en o.n.b. for $\mathbb{R}^3$. Skriv så $(1, -1, 0)$ som en linearkombination af de fundne vektorer.

  Gram-Schmidt: Regn 6.10+13.

  Ortogonalkomplement: Vis påstandene midt på side 111 om $U^\perp$.

  Find $U^\perp$ når $U \subset \mathbb{R}^3$ er givet ved $U = \operatorname{span}((1, 2, 3))$. Opskriv hvad den direkte sum $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ giver for vektoren $(2, 4, -1)$.

  Regn 6.15.

  Øvre trekantsmatrix: Dyrk opgave 6.14. opskriv også matricen.

  Yderligere træning: Lav 6.15-16.

- **15.30–16.15:** Vi gør her kapitel 6 færdigt, bemærk at der er mange nye begreber her: *Funktionaler, adjungerede operatorer og adjungerede matricer*. Forsøg endelig at læse om dem inden forelæsningen !

  Vi når måske også lidt af kapitel 7.

11. gang, fredag den 3. oktober.

- **8.15–9.00:** Her begynder vi på kapitel 7.

- **9.00–11.00:** Sig til her, hvis beviset for Proposition 6.47 er vanskeligt. Dernæst opgaver i:

  Ortogonal projektion: Eftervis nr. 2,3,5 blandt påstandene over 6.35.

  Brug den almene formel for P_U, jvf. 6.35 i [A], til at finde $P_U(2, 4, -1)$ i opgaven ovenfor. (Ser det bekendt ud?)

Minimering: Regn 6.21.

Adjungeret afbildning: Regn 6.26+27+30.

Gamle opgaver dernæst.

- **11.15–12.00:** Emnet er her *spektralsætningen* 7.9, som er en af kursets hovedsætninger. Vi skal på afgørende måde udnytte, at operatorer har *øvre trekantsmatricer* mht. passende baser; repeter derfor 6.28 og 5.13.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

12. gang, tirsdag den 7. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi stiler mod at gøre [A] færdig ved at gennemgå beviset for den *reelle* spektralsætning.

- **13.15–15.15:** Blandt opgaverne ser vi på:

  Den storplettede ugle: Matricen A for dette diskrete dynamiske system er ikke selvadjungeret (hvorfor?).
  Udsiger spektralsætningen så, at A ikke er diagonaliserbar ?

  Matrix-diagonalisering: Givet en matrix $A_{n,n}$ og betragt matrixoperatoren $Tu = Au$, $T\colon \mathbb{L}^n \to \mathbb{L}^n$. Antag der findes en diagonalmatrix D og en inverterbar matrix P sådan at
  $$A = PDP^{-1}. \tag{16}$$
  Vis da at diagonalelementerne i D er egenværdier for A med P's søjler som de tilhørende egenvektorer. (*Vink:* Sæt $P = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$ og udregn AP og PD.) Slut at P's søjler ugør en *basis* for $\mathbb{L}^n$.
  Udled det omvendte: Hvis $\mathbb{L}^n$ har en basis $(v_1, \dots, v_n)$ bestående af egenvektorer for A, da gælder (16) for en diagonalmatrix D og en inverterbar matrix P.
  Endelig: Idet A^* betegner den adjungerede (=konjugerede af den transponerede) matrix, angiv da to tilstrækkelige betingelser (for $\mathbb{L} = \mathbb{C}$ hhv. $\mathbb{L} = \mathbb{R}$) for at P kan vælges så søjlerne udgør et *ortonormalt* sæt i $\mathbb{L}^n$. Indse at man i så fald har at
  $$P^{-1} = P^* \quad \text{dvs. } P \text{ er} \quad \begin{cases} \textit{unitær} \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{C} \text{ (jvf. 7.36 i [A])}, \\ \textit{ortogonal} \text{ for } \mathbb{L} = \mathbb{R}. \end{cases} \tag{17}$$
  Er disse betingelser på A nødvendige for at P kan vælges unitær hhv. ortogonal ?

  Selvadjungerede operatorer: Lav 7.2+3+9.

  Regn opgaver fra sidst, hvis der er tid til overs.

- **15.30–16.15:** Vi tager et udvalg fra kapitel 0, nemlig om lineære differentialligninger i kapitel 0.2 og 0.3.

  Dernæst fortsættes med kapitel 1.1 i [AB] om *eksistens- og entydigheds-sætningen*. Vi vil dog ikke gennemgå beviset, idet dette gives på Mat 2 (det kræver avancerede teknikker I først møder til den tid).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi nåede sidste gang til og med side 137 i [A].

Desuden begyndte vi på [AB], hvori vi nåede kapitel 0.2 — og talte en del om den farlige notation blot at skrive x, x' osv. når der menes $x(t)$, $x'(t)$ osv.

13. gang, fredag den 10. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi genoptager gennemgangen af kapitel 0.3 i [AB]. Hensigten er også at nå lidt af kapitel 1.1 om Lipschitzbetingelser (som er centrale for jeres projekter !).

- **9.00–11.00:** Opgaver i følgende emner:

  Selvadjungerede operatorer: Gennemregn eksemplet øverst side 136.

  Polynomier: Faktoriser $x^3 - x^2 + 4x - 4$ efter opskriften midt på side 135.

  Spektralsætningen: Skriv $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ som $A = PDP^{-1}$, hvor P er *ortogonal*, jvf. sidste gang.

  Udnyt dette i ligningen

  $$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 1/2. \tag{18}$$

  Vis at koordinatskiftet $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = P^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ fører ligningen (18) over i

  $$y_1^2 + 3y_2^2 = 1. \tag{19}$$

  Udled at løsningsmængden er en *ellipse* ! Tegn denne !

  1. ordens ligninger: Løs differentialligningerne i opgave 0.2.5 i [AB].

- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.1 i [AB]. Det centrale bliver sætningerne 1+2, lemma 1 og begrebet maksimale løsninger. (Alt dette bør også være centralt for projekterne!)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Sidste gang nåede vi side 34 med. Repeter begreber som *løsning, eksistens, entydighed, Lipschitzbetingelse*.

De af jer som kender metoden *separation af de variable* kan også med fordel repetere denne (se side 2–3 i [AB]). Den dukker nu op i eksempler og opgaver.

14. gang, tirsdag den 28. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi repeterer lidt og fortsætter her med side 39 og stiler mod at gøre kapitel 1.1 færdigt.
- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Separation af de variable: Regn opgave 0.1+2 i [AB].

  Lipschitzbetingelser: Regn opgave 1.1.

  Eksistens- og entydighed: Lav 1.4 og 1.10.

  Ligninger af højere orden: Regn 1.1.2.

- **15.30–16.15:** Emnet er her resten af afsnit 1.1 og den del af 1.2 som omhandler systemer af *første* orden.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Igår afsluttede vi kapitel 1.2, dog som nævnt uden beviset for eksistens- og entydighedssætningen (Sats 1,1' og 2). Desuden udelod vi lemma 1, og korllaret side 41 om ligninger af højere orden kan læses af de særligt interesserede.

Endelig blev bevisdelen side 44 erstattet af en mere analytisk overvejelse.

I forbindelse med Lipschitzbetingelser blev det nævnt at man ofte kan bruge *middelværdisætningen* (jvf. Analyse I): *Hvis* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *er kontinuert, og på* $]a,b[$ *endda differentiabel, så findes et* $z \in]a,b[$ *som opfylder*

$$f(b) - f(a) = f'(z)(b-a). \tag{20}$$

Som vi så, så er ligningen ækvivalent med at linien gennem $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$ har en hældning, der er lig $f'(z)$ for et passende z med $a < z < b$ — og at dette grafisk set virker oplagt (tegn!). Et stringent bevis kommer dog først på Analyse I.

15. gang, torsdag den 30. oktober.

- **12.30–13.15:** Her gennemgås kapitel 1.2; det centrale bliver begrebet fundamentalløsninger og deres rolle ifm. inhomogene ligninger, side 49 med.
- **13.15–15.15:** Her er der opgaver i:

  Eksistens- og entydighed: Regn 1.4, 1.10 og 1.8.

  Maksimale løsninger: Eftervis påstanden lige undr midten side 46, om at der er en entydigt bestemt løsning defineret på hele I (en *global* løsning).

  Højere orden: Lav opgave 1.2.

- **15.30–16.15:** Vi tager her hul på kapitel 2.1 om lineære systemer med konstante koefficienter. (Det er her vi for alvor skal analysere til bunds for at forberede stabilitetsanalysen af ikke-lineære systemer.) Vi begynder dog med side 89–90 om *normer* af matricer. (Repeter det almene normbegreb fra dine notater til 8./9. gang!)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Vi nåede sidste gang til side 49 med, og forlader nu kapitel 1.

I bør til næste gang orientere jer grundigt i afsnit 2.1, om hvad der kommer til at foregå. I har brug for at vide, at man kan vise, at den sædvanlige eksponentialfunktion for hvert $t \in \mathbb{R}$ er fremstillet som en konvergent række:

$$e^t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} t^k =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \tag{21}$$

Man definerer derfor eksponentialmatricen e^A i analogi hermed,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{22}$$

Dette er hovedemnet for kapitel 2, hvor vi skal se at denne matrix har rigtig mange egenskaber til fælles med eksponentialfunktionen, og derfor fortjener at blive betegnet med e^A.

I kapitel 2 omtales også mere generelle funktioner af matricer betegnet med $f(A)$; den generalisering behøver I ikke gå i detaljer med, så I kan læse dette, som om det blot var e^A.

Kapitel 2.1 vil blive gennemgået lidt i uddrag fordi bogen forudsætter visse ting I først møder på Analyse 2. Men vi finder en anden vej til målet, blot må I så være indstillet på at få god lejlighed til at træne notetagningsteknik !

Vi begynder med definitionen af e^A s. 89 (sæt $f(x) = e^x$ der, dvs. $a_k = 1/k!$). Og *operatornormen* samme steds. Generelt er en *norm* på et vektorrum V over $\mathbb{L}$ en afbildning $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ som opfylder:

$$\text{(i) } \|v\| \geq 0 \quad \text{for alle } v \in V \text{, og kun} = 0 \text{ for } v = 0; \tag{23}$$

$$\text{(ii) } \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{L} \text{ og } v \in V; \tag{24}$$

$$\text{(iii) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{for alle } u, v \in V. \tag{25}$$

Bemærk at et normeret vektorrum V altid har en metrik (=afstandsfunktion) induceret ved at sætte $d(u, v) = \|u - v\|$. Specielt er dette tilfældet for matricer med operatornormen, hvor $d(A, B) = \|A - B\|$. NB ! Dette svarer til konvergens af matrixelementerne jvf. side 91 øverst. Vi vil give lemma 3 et direkte bevis, hvor afsnitsfølgen $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ ses at være en Cauchy-følge, og derfor er konvergent.

16. gang, mandag den 3. november.

- **8.15–9.00:** Vi begynder på kapitel 2.1 efter retningslinierne ovenfor.
- **9.00–11.00:** Opgaver om

Fundamentalmatricer: Regn opgave 1.14+15.

Dimension af løsningsrum: Gennemfør den sidste del af beviset for sætning 4 side 47 og vis at afbildningen i beviset er en isomorfi.

Højere orden: Lav 1.13+17.

Vis påstanden nederst side 50, og indse at man derved (for $n = 3$) nemt får den sidste halvdel af beviset for sætning 0.2.

Komplekse løsninger: Kontroller påstandene i bemærkningen side 47–48 !

- **11.15–12.00:** Vi forsætter til side 94 med.

17. gang, tirsdag den 4. november.

- **12.30–13.15:** Her giver vi vores eget bevis for korollaret nederst side 100. Vi baserer os på Theorem 5.13 i [A] om øvre trekantsmatricer. REPETER denne ! Repeter også opgaven fra 12. gang om faktoriseringen $A = PDP^{-1}$.

- **13.15–15.15:** Opgaver:

Differentialligninger med *øvre trekantsmatrix*: Bevis at

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \dots & & u_{1n} \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \lambda_{n-1} & u_{n-1,1} \\ 0 & \dots & & & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

har løsningsmængden bestående af de funktioner, der kan skrives på formen

$$y_j(t) = \sum_{k=j}^{n} p_{jk}(t)e^{\lambda_k t},$$

hvor hvert $p_{jk}(t)$ er et polynomium med $\mathrm{grad}(p_{jk}) \leq \nu_k - 1$, idet ν_k er det antal gange λ_k optræder i diagonalen (dvs. multipliciteten af λ_k som egenværdi). *Vink:* Vis først påstanden for $y_n(t)$.

Eksponentialmatricer: Regn opgave 2.1+2+3.

Fundamentalmatricer: Regn opgave 2.9.

Kontinuitet af regneoperationer: Lad V være et normeret vektorrum over $\mathbb{L}$. Vis da at begge regneoperationer er kontinuerte. Dvs.

$$u_n \to u,\ v_n \to v \implies u_n + v_n \to u + v \tag{26}$$

$$\lambda_n \to \lambda,\ v_n \to v \implies \lambda_n v_n \to \lambda v \tag{27}$$

Gælder det samme for matricer ?

Bevis også at der om $A, A_k \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{L})$ og $v, v_k \in \mathbb{L}$ gælder

$$A_k \to A,\ v_k \to v \implies A_k v_k \to Av.$$

Slut endelig at $e^A x = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k x$ for alle $x \in \mathbb{L}^n$.

- **15.30–16.15:** Her fortsættes med 2.2. Vi skal her opnå en hovedpointe for lineære systemer, som er flg. stabilitetsresultat: Om enhver løsning til $x'(t) = Ax(t)$ gælder at $\|x(t)\| \to 0$ for $t \to \infty$ hvis og kun hvis alle egenværdier λ til A har *negativ* realdel, dvs. $\operatorname{Re}\lambda < 0$.

NB! Oversigten består af 3 sider!

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

I tirsdags gennemgik vi til og med kapitel 2.2 samt side 108.
Vi går nu videre med kapitel 5 om den almene stabilitetsanalyse.

18. gang, fredag den 7. november.

- **8.15–9.00:** Vi gennemgår hovedpunkterne fra kapitel 5.1–5.2 i [AB]. Dette er især ligevægtspunkter og definitionen af stabilitet side 260.
- **9.00–11.00:** Opgaverne er i emnerne:

  Homogene ligninger: Regn 2.11 og 2.13.

  Strukturen af eksponentialmatricer: Regn 2.13(inspicer!) og 2.15.

  Komplekse løsninger: Lav 2.14.

  Desuden opgaver fra sidste gang.
- **11.15–12.00:** Her skal vi frem til sætning 2 side 269. Vi skal som hjælpemiddel møde Liapunov-funktioner, som er et berømt trick, der groft sagt består i at finde en hjælpefunktion E, der opfører sig som energien i et mekanisk system: Den bliver mindre som tiden går (t vokser), og hvis systemet kommer i en ligevægtstilstand, så er det fordi energien ikke *kan* blive mindre ! (For os betyder det, at et stabilt ligevægtspunkt vil være et globalt minimumspunkt for hjælpefunktionen E.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 16

Vi nåede idag til og med afsnit 5.2.

Næste gang fortsætter vi med kapitel 5.3, hvor vi først skal møde Lyapunov funktioner. Udgangspunktet bliver Eksempel 2 side 253, som man bedes læse inden forelæsningen. Sætningerne 2, 3, 4 og 6 vil være højdepunkter.

Fredag den 17/11 fortsættes med kapitel 5.4. Kursets hovedmål er at vise sætning 7 side 280.

Siden opdateres mandag 10/11.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 17

Vi har tidligere gennemgået et udvalg fra afsnit 5.1–5.3: Autonome systemer, baner (jvf. eks. 1), ligevægtspunkter, eksempel 2+6 som eksempel på faseportræt og som optakt til Liapunovfunktioner, eksempel 4 som eksempel på ustabile ligevægtspunkter og grænsecyklus, stabilt og asymptotisk stabilt ligevægtspunkt; eksempler på ligevægtspunkter og faseportrætter for lineære systemer med 2×2-matricer; Liapunovfunktioner E og deres afledte langs "vektorfeltet" $f(x)$, dvs. $\dot{E}_f(x) = \operatorname{grad} E(x) \cdot f(x)$.

19. gang, tirsdag den 11. november.

- **12.30–16.15:** Her så vi nærmere på beviset for sætning 2+3 i afsnit 5.3.

  Desuden så vi på opgaverne 5.9+5.4, samt gamle opgaver.

20. gang, fredag den 14. november.

- **8.15–10.00:** Vi fortsætter her med sætning 5.7 og dens bevis, som er spredt ud over siderne 278–280. Bogen er lidt uklar her, så vi vil se lidt generelt på *kvadratiske former*. Dette er funktioner på $\mathbb{R}^n$ som vha. en symmetrisk matrix $Q_{n,n} = (q_{i,j})$ kan skrives på formen

$$f(x) = x^T Q x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j q_{jk} x_k.$$

  Som vi skal se kan disse, fordi Q er symmetrisk, analyseres på afgørende måde ved diagonalisering. Hertil skal vi udnytte den reelle spektralsætning og opgaven om $A = PDP^{-1}$ fra 12 gang. REPETER BEGGE DELE !

- **10.00–12.00:** Opgaveregning: Eftervis (19) side 278, som udsiger at enhver norm på $\mathbb{R}^n$ er ækvivalent med den euklidiske.

  Eftervis påstanden i lemma 1's bevis om at $\lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{tA}x \cdot e^{tA}y \, dt$ eksisterer uanset valget af $x, y \in \mathbb{R}^n$.

  Regn opgave 5.18 og 5.21 (se figuren side 294 for et faseportræt der kvalitativt passer til ligningen (samme steds kan man også se en omskrivning til et system af første orden)).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 18

Som lovet bringes her en

Pensumliste.

I "Linear algebra done right" af Sheldon Axler har vi læst kapitlerne 1–7 frem til og med side 137; dog ikke side 91–93, og desuden var kapitel 4 kun kursorisk.

Fra "Ordinära differentialekvationer" har vi gennemgået

kapitel 0: Hele terminolgien og teorien, dog med undtagelse af afsnittet om Eulerligninger; eksempel 3,5,7 og 10 (samt evt. 11 afhængigt af projektemne) kan overspringes.

kapitel 1: Afsnit 1.1 undtaget beviserne for eksistens- og entydighedssætningen. Afsnit 1.2 frem til side 50.

kapitel 2: Afsnit 2.1 med to forbehold: Dels har vi kun omtalt eksponentialmatricer (og ikke $\cos A$ og de andre mere generelle konstruktioner) og dels blev siderne 95-100 (linie 14) erstattet af et udleveret notat om eksponentialmatricer indeholdende et alternativt bevis for "följdsats" side 100.

Afsnit 2.2 i sin helhed.

kapitel 5: Afsnittene 5.1-5.4 til og med side 280, dog uden bevis for "Sats 8". Desuden sprang vi over "Sats 5+6" og eksempel 5.9–5.10

Med venlig hilsen
Jon Johnsen