Oversigt nr. 1

I PE-kurset i skal vi bruge

[A] Sheldon Axler: *Linear algebra done right*, 2nd ed., Springer.

[P] Lawrence Perko: *Differential equations and dynamical systems*; Springer.

Groft sagt begynder vi med at gennemgå kapitel 1–3, 5–7 i [A] i løbet af de første 10 seancer. Jævnfør skemaet på næste oversigt.

I kan med fordel læse til og med side 8 i [A] som forberedelse til første gang.

2. gang, fredag den 4. september.

- **8.00–8.45:** Vi tager hul på [A] og stiler mod at nå "Subspaces" i kapitel 1.
- **8.45-9.45 og igen 12.30–13.30:** Her er programmet opgaveregning:

  Kapitalformlen: Bevis ved induktion efter n, at den simple differensligning $K_{n+1} = (1 + r)K_n$ (hvor r betegner rentefoden, f.eks. $r = 0,07$ ved 7% p.a.) har løsningen
  $$K_n = (1 + r)^n K_0. \tag{1}$$
  Hvis man som 20-årig anbringer 10000kr. til 10% p.a, hvad er så K_{14} ? (Mange køber hus når de er 35-40.) Og K_{40} ? (mange køber sommerhus, når de er 60.)
  Hvad får man, circa, ved at placere 10000kr. til 10% p.a. hvert år som 20–24 årig ? K_{14} ? K_{40} ?

  Iteration: Man kan bestemme $\sqrt{2}$ f.eks. ved at indføre $f(x) = \sqrt{x}$ og at
  $$x_{k+1} \approx x_k + f'(x_k)^{-1}(f(x_k) - f(x_{k-1})), \tag{2}$$
  Prøv at indsætte $x_0 = 1,4$ og $x_1 = 1,41$ osv.

  Om $\mathbb{C}$: Regn 1.1+2 i [A].

  Om vektorrum: Regn 1.3 i [A].

  Om underrum: Lav 1.5–8 i [A].

- **13.30–14.30:** Her gennemgår vi resten af Kapitel 1 om *sum* af underrum.

2. gang, tirsdag den 8. september.

- **8.15–9.00:** Vi begynder på kapitel 2 og stiler mod at nå 2.6.
- **9.00–11.00:** Programmet er resten af opgaverne til kapitel 1 i [A].
- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 2 i [A], til og med 2.17.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Nedenstående er opdateret pér 1. september.
Emnerne er glimrende **STIKORD** i forbindelse med selvoverhøring...

Uge	Dato	Seance	Emner
36	4/9	1	kapitel 1: Vektorrum, underrum, direkte summer
37	8/9	2	kapitel 2: Lineær (u)afhængighed, frembringelse, baser
	11/9	3	kapitel 2: Baser: supplering/udtyndelse, dimension, Grassmann's dimensionsformel
38	15/9	4	kapitel 3: Lineære afbildninger, nulrum og billedrum, dimensionssætningen; matricer
	18/9	5	kapitel 3: Invertibilitet, koordinattransformationer
39	22/9	6	kapitel 5: Egenværdier og -vektorer, invariante underrum, øvre trekantsmatricer
	23/9	7	kapitel 5: Diagonalisering, basisskifte
40	29/9	8	kapitel 6: Indre produkt, norm; Cauchy–Schwarz' ulighed; ortonormale baser, Gram–Schmidt ortonormalisering
	2/10	9	kapitel 6: Ortogonal projektion, afstandsminimering, adjungerede afbildninger og ditto matricer
41	6/10	10	kapitel 7: Normale/selv-adjungerede operatorer, spektralsætningen
	9/10	11	kapitel 7: Mere om spektralsætningerne, similaritet

Ændringer kan naturligvis forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 2 til og med Prop. 2.8.

Første gang nævnte vi følgende **hovedeksempel**: Lad $F(M, \mathbb{L}^n)$ betegne mængden af afbildninger $f\colon M \to \mathbb{L}^n$, hvorved M er en given vilkårlig mængde. Da er $V = F(M, \mathbb{L}^n)$ *også* et vektorrum over $\mathbb{L}$ med de *punktvise* kompositioner:

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m); \qquad (a \cdot f)(m) = a \cdot f(m).$$

F.eks. er $\mathbb{C}^k = F(M, \mathbb{L})$ når man tager $M = \{1, 2, ..., k\}$ og $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, idet $f \in F(\{1, 2, ..., k\}, \mathbb{C})$ da har sin værdimængde $f(\{1, 2, \dots, k\})$ organiseret som $(z_1, z_2 \dots, z_k)$. (Dette er mao. den præcise definition af et par (z_1, z_2), et tripel (z_1, z_2, z_3) eller et generelt k-tupel $(z_1, z_2, \dots, z_k)$.) På samme vis fås $\mathbb{R}^k$.

Desuden fås eksemplet $\mathbb{L}^\infty$ fra [A] som $F(\mathbb{N}, \mathbb{L})$ — overvej hvorfor ! Dette er nyttigt i forbindelse med

Den storplettede ugle: (Repeter dette eksempel fra indledningen til kapitel 5 i Lays bog.) Tilstandsvektorerne $\vec{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$ kan bekvemt anses for at ligge i $\mathbb{C}^3$ pga. komplekse egenværdier for matricen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{pmatrix}$. Her er A lig koefficientmatricen i det diskrete dynamiske system

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k, \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0.$$

En *løsning* $\vec{x}_k$ hertil er faktisk et element i $F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$, som er et komplekst vektorrum, jævnfør ovenfor. Eksemplet tages op ved næste forelæsning.

3. gang, fredag den 11. september. Foruden ovenstående er programmet:

- **8.00–8.45:** I [A] fortsætter vi med 2.10 om supplering til en basis, frem til 2.13. Undervejs vil lemma 2.4 spille en afgørende rolle (som i beviset for theorem 2.6), så sørg for at du/I har forstået dette lemma før forelæsningen.

- **8.45–9.45 og 12.30–13.30:** Opgaverne bliver her følgende:

  Frembringersæt: Frembringer $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 3, 4))$ $\mathbb{C}^3$?

  Baser: Vis at $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1))$ er en basis for $\mathbb{C}^3$. Find koordinaterne for $(1 + \mathrm{i}, 2 + \mathrm{i}, 2)$ mht. B.

  Lineær uafhængighed: Vis at hvis $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ er lineært uafhængigt, så er også $(u_2, \dots, u_m)$ et lineært uafhængigt sæt. Gælder det samme for ethvert delsæt ? Regn opg. 2.2+3.

  Endelig dimension: Gennemsku opg. 2.5 !

  Almene vektorrum: Lad $F(M, U)$ være mængden af afbildninger $f\colon M \to U$, hvor M er en vilkårlig mængde og U er et givet vektorrum over $\mathbb{L}$. Eftervis da at $V = F(M, U)$ er et vektorrum over $\mathbb{L}$.

- **13.45–14.30:** Vi fortsætter her med resten af kapitel 2, hvor vi skal beskæftige os med begrebet *dimension* på en seriøs måde.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

4. gang, tirsdag den 15. september.

- **8.15–9.00:** Vi begynder på kapitel 3 i [A] om lineære afbildninger (også kaldet *operatorer*).

- **9.00–11.00:** Ved øvelserne regnes opgaver om:

  Grundbegreber: Lad $U \subset \mathbb{R}^3$ bestå af de vektorer (x, y, z), som for passende $s, t \in \mathbb{R}$ opfylder

  $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

  Find et *frembringersæt* for U. Bestem et lineært *uafhængigt* sæt i U. Angiv en *basis* B for U, og bestem *koordinaterne* for $u = (3, 2, 11)$ mht. denne basis.

  Suppler B til en basis B' for $\mathbb{R}^3$. Angiv koordinaterne for u mht. B'.

  Hvad er $\dim U$? Er dette en modstrid med at u er et tripel ?

  Udtynding: *Udtynd* sættet $((1, 1), (2, -3), (3, -2))$ til en basis for det komplekse rum $\mathbb{C}^2$. (Overvej hvorfor du/I fik et frembringersæt for $\mathbb{C}^2$.)

  Kan sættet

  $$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

  udtyndes til en basis for $\mathbb{C}^3$?

  Polynomier: Vis at $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ er et underrum af $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Kontroller at $B = (1, x, x^2, \dots, x^m)$ er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ og find $\dim \mathcal{P}_m$.

  Godtgør at polynomierne, for fastholdt $a \in \mathbb{R}$,

  $$S_a = (1, x - a, (x - a)^2, \dots, (x - a)^m) \tag{3}$$

  er et frembringersæt for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. (*Vink:* Brug Taylors formel.) Vis også at sættet S_a er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.

  Er S_a en 'smartere' basis end B ? Prøv at Taylor-udvikle $\sin x$ i $a = \pi/2$ til orden $m = 2$ og skrive polynomiet i basen B — fremskridt eller tilbageskridt ?

  Baser: Regn opgaverne 2.8+14.

  Direkte sum: Lav 2.10+13+17.

  (U)endelig dimension: Regn 2.5+7+6.

- **11.15–12.00:** Her gennemgår vi kapitel 3 frem til side 53 om matricer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi nåede sidste gang til og med s. 50. Dog blev et par forklaringer udskudt.

I kapitel 3 bør I se grundigt på eksemplerne — forstå hvorfor afbildningerne er lineære.

5. gang, fredag den 18. september. Hovedemne: Linearitet.
Bemærk tiderne !

- **8.15–9.00:** Vi fortætter med kapitel 3 om lineære afbildninger og matricer.
- **9.00–11.00:** Opgaveregningen fokuserer på:

  Linearitet: Eftervis at $T\colon V \to W$ er lineær netop når

  $$T(\lambda u + \mu v) = \lambda T u + \mu T v \tag{4}$$

  for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$ og alle $u, v \in V$.
  Verificer påstanden s. 41 øverst om at ST er lineær.
  Regn endelig opgave 3.2 og 3.3 (brug at U har et komplement).

  Billedrum: Giv dit eget bevis for at billedmængden for en lineær afbilding er et underrum.

  Injektivitet: Lav 3.5.

  Surjektivitet: Godtgør påstandene om surjektivitet midt på s. 44.
  Regn dernæst 3.7.

  Dimensionssætningen: 3.9+11+12.

  To udfordringer: Lav 3.8 og 3.16. (Hvorfor må uligheden i opgaven forventes?)

  Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her gør vi kapitel 3 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Vi nåede idag resten af kapitel 3. (Læs selv Proposition 3.20.)

Næste gang skal vi se at Proposition 3.14 giver en simpel diskussion af **Koordinatttransformation:** Når et vektorrum V har to baser $B = (v_1, \dots, v_n)$ og $C = (w_1, \dots, w_n)$, så kan enhver vektor $v \in V$ skrives på to måder:

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n. \tag{5}$$

Dette giver i første omgang to forskellige koordinatsøjler for v, nemlig

$$\mathcal{M}(v, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}(v, C) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Kendes blot den ene kan den anden bestemmes ved hjælp af koordinatransformationsmatricen S, idet

$$\mathcal{M}(v, C) = K \cdot \mathcal{M}(v, B). \tag{7}$$

NB ! Her er $K = \mathcal{M}(I, B, C)$ når $I \colon V \to V$ betegner den identiske afbildning, og formlen (7) følger *direkte* af Proposition 3.14, når denne bruges på I.

Eksempelvis har $v = (1, 7)$ koordinatsøjlen $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ mht. den naturlige basis $E = (e_1, e_2)$; desuden kunne man indføre basen $C = (w_1, w_2)$, hvor $w_1 = (1, -1)$, $w_2 = (1, 1)$. Idet

$$e_1 = \tfrac{1}{2} w_1 + \tfrac{1}{2} w_2, \qquad e_2 = -\tfrac{1}{2} w_1 + \tfrac{1}{2} w_2, \tag{8}$$

sluttes (af side 48 i [A]) at $K = \mathcal{M}(I, E, C) = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$, hvorfor (7) giver

$$\mathcal{M}(v, C) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

6. gang, tirsdag den 22. september.

- **8.15–9.00:** Først gøres kapitel 3 færdigt med konsekvenserne ofr koordinattransformationer. Læs og forstå ovenstående, så lægger vi hovedvægten på matricers transformation.

  Dernæst tager vi i kapitel 5 et gensyn med egenværdier og egenvektorer. Desuden skal I møde invariante underrum: Hvis $T \in \mathcal{L}(V)$, så kaldes et underrum $U \subset V$ *invariant* ved T, hvis $T(U) \subset U$.

- **9.00-11.00:** Opgaver i flg. emner:

Matricer: Find $w = T(1,1)$, når T er som *midt* på side 49 i [A]. Bestem dernæst $\mathcal{M}(w)$ ved at bruge T's matrix.

Indfør nu basen $B = ((2,0),(1,-1))$ for $\mathbb{L}^2$ foruden den naturlige basis E for $\mathbb{L}^3$. Hvad er da $\mathcal{M}(1,1)$ og $\mathcal{M}(T;B,E)$? Brug disse til at bestemme $\mathcal{M}(w)$.

Lav 3.19.

Koordinater: Regn 3.20. Er der en isomorfi her ?

Dimensionssætningen: Regn 3.26+10.

Inverterbarhed: Vis at hvis $T \in \mathcal{L}(V)$ er inverterbar, så har matricen $\mathcal{M}(T)$ (mht. en fast valgt basis for V) en invers *matrix* og

$$\mathcal{M}(T)^{-1} = \mathcal{M}(T^{-1}). \tag{10}$$

Formuler og bevis et omvendt resultat hertil !

Anvendelse: I (7) er matricen K inverterbar — begrund hvorfor !

Inverser: Gennemsku 3.22 (*vink:* Hvad kunne $(ST)^{-1}$ være ?). Og den overraskende 3.23.

Injektiv: Lav 3.14 (brug opgave 3.3 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *højreinvers* er !?

Surjektiv: Lav 3.15 (brug opgave 3.8 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *venstreinvers* er !?

- **11.15–12.00:** Her fortsættes frem mod Theorem 5.18.

Den storplettede ugle: I forbindelse med differensligningen (jvf. Lays bog kap. 5)

$$\vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{11}$$

kan man indføre $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \ldots)$, som er element i det tidligere indførte vektorrum $V = F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$. Da udgør løsningerne et *underrum* $U \subset V$: Dvs., for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ og alle løsninger x, y fås en ny løsning $z \in V$, nemlig

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda\vec{x}_0 + \mu\vec{y}_0, \ldots, \lambda\vec{x}_k + \mu\vec{y}_k, \ldots).$$

Thi $\mathcal{A}x = (A\vec{x}_0, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots)$ definerer en lineær afbildning $\mathcal{A}\colon V \to V$; desuden rummer $\mathcal{L}(V)$ skifteoperatoren $Sx = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{k+1}, \ldots)$, jvf. side 39 i [A], så ligningen er ækvivalent med $Sx = \mathcal{A}x$ og derfor med

$$(S - \mathcal{A})x = 0 \quad \text{eller} \quad x \in \mathrm{Null}(S - \mathcal{A}). \tag{12}$$

Af disse grunde siges differensligningen at være *lineær*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Som I kan se, springer vi kapitel 4 i [A] over. Dette skyldes især, at vi alligevel ikke kan overkomme at bevise algebraens fundamentalsætning (4.7) på dette semester. (I vil senere på MAT 2 se et smart bevis, der ikke bruger lineær algebra.)

Man kan dog med fordel orientere sig om indholdet af kapitel 4. En god indgangsvinkel kunne være Korollar 4.8, som vi idag har brugt direkte i beviset for Theorem 5.10. Indse dette (!) Prøv evt. at følge beviset for Korollar 4.8, dvs. for at korollaret er en konsekvens af algebraens fundamentalsætning 4.7.

7. gang, fredag den 25. september.

- **8.00–8.45:** Vi stiler mod at nå Prop. 5.18.
- **8.45–9.45 og 12.30–13.30:** Opgaver i:

  Polynomier af operatorer: Vis påstanden side 80_7 i [A]. Eftervis dernæst den helt afgørende formel side 81^1 at
  $$(pq)(T) = p(T) \cdot q(T). \tag{13}$$

  Den storplettede ugle(=anvendelse af teorien): Indse først, at der til hvert $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ findes et og kun et $x = (\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k, \dots) \in F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$ som opfylder
  $$\begin{cases} \vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \vec{x}_0 = \vec{v}. \end{cases} \tag{14}$$
  Vink: Man kan vise enhver løsning nødvendigvis har formen $x = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$; og omvendt at denne vektorfølge faktisk løser begyndelsesværdiproblemet ovenfor.
  Med andre ord er $\Phi(\vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$ en bijektion af $\mathbb{C}^3$ på løsningsmængden, kaldet X, til selve *differens*ligningen.
  Vis at Φ er en isomorfi $\mathbb{C}^3 \to X$, samt at $\dim X = 3$. (NB ! Theorem 3.18 i [A] kan ikke bruges som den står; men brug forbemærkningen til den).

  Egenvektorer: Regn 5.5 og 5.6.

  Egenværdier: Regn 5.10.

  Invariante underrum: Lav opg. 5.1 og 5.4.

  Eventuelt gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **13.45–14.30:** Resten af kapitel 5 frem til side 90. Desuden lidt om basisskifte i forbindelse med diagonalisering.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Vi nåede i dag kapitel 5 frem til side 90 om diagonalisering af operatorer. Generelt siges en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ at være *diagonaliserbar* hvis den opfylder en (og dermed enhver) af de ækvivalente betingelser i 5.21. NB !

8. gang, tirsdag den 29. september.

- **8.15–9.00:** Her fortsætter vi med kapitel 6 — nu skal vi til at inddrage *skalarprodukter*.

  Vi vil tage let på de første 2–4 sider, som I bør læse inden forelæsningen.

- **9.00–11.00:** Opgaver:

  Matricer: Find matricen for $T = \frac{d}{dx}$ når $V = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ udstyres med basen $(1, x, x^2, \dots, x^m)$.

  Ekstra: Hvorfor er $\lambda = 0$ eneste egenværdi? Er dette overraskende?

  Diagonalisering: Find samtlige egenværdier og -vektorer for

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

  Brug Sætning 5.21 til at afgøre, om matricerne er diagonaliserbare.

  Den storplettede ugle: Vis at A er diagonaliserbar når

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

  (Find dens karakteristiske polynomium ved håndkraft, siden rødderne (evt. ved maskinkraft) og bestem egenværdierne. Konkluder så!)

  Udled at der findes $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{C}^3$ så enhver begyndelsesvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^3$ på entydig måde kan skrives

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3.$$

  Bevis at der for enhver løsning $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots)$ til differensligningen $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ gælder

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= c_1 A^k \vec{u}_1 + c_2 A^k \vec{u}_2 + c_3 A^k \vec{u}_3 \\ &= c_1 \lambda_1^k \vec{u}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{u}_2 + c_3 \lambda_3^k \vec{u}_3, \end{aligned} \tag{15}$$

  for komplekse skalarer $\lambda_1 \approx 0,98$, $\lambda_2 \approx -0,2 + \mathrm{i}\,0,21$ og $\lambda_3 \approx -0,2 - \mathrm{i}\,0,21$. Brug egenskaberne ved en *norm* til at udlede at

$$\|\vec{x}_k\|_{\mathbb{C}^3} \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{16}$$

  Hvad betyder dette for uglebestanden ?

Egenværdier og -vektorer: Regn opgave 5.8 og 5.7.

- **11.15–12.00:** Her stiler vi mod at nå 6.28.

9. gang, torsdag den 1. oktober.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med kapitel 6.
- **13.15–15.15:** Opgaver i emnerne:

  Øvre trekantsmatricer: Regn opgave 5.17.

  Egenværdier: Regn 5.20. Evt. 5.23.

  Gram–Schmidt: Tegn $(2, 1)$ og $(-3, 2)$ og ortonomaliser dem!

  Cauchy–Schwarz: Lav 6.3.

  Indre produkter: Regn 6.6+7.

  Gamle opgaver der efter.

- **15.30–16.15:** Vi gennemgår resten af kapitel 6. Eksemplerne side 114–116 vil kun blive skitserede — men hvis I er bare *lidt* nysgerrige kan I lære en masse om matematik & lommeregnere mm !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

I går nåede vi til og med side 116 i [A]. Siderne 114–116 var kursorisk stof, omend meget illustrativt for *rækkevidden* af lineær algebra.

10. gang, fredag den 9. oktober. Efter **aftale** er tidsplanen:

- **8.15–9.00:** Her gennemgår vi resten af kapitel 6. Orienter jer hjemmefra om *funktionaler, adjungerede operatorer*.

- **9.00–11.00:** Opgaver:

  Ortonormal: Afgør om vektorerne $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ og $(1, 0, 0)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. (Nem!)

  Brug Gram–Schmidt ortogonalisering til at finde en o.n.b. for $\mathbb{R}^3$. Skriv så $(1, -1, 0)$ som en linearkombination af de fundne vektorer.

  Gram-Schmidt: Regn 6.10+13.

  Ortogonalkomplement: Vis at $U^\perp$ er et underrum og at $\{0\}^\perp = V$.

  Find $U^\perp$ når $U \subset \mathbb{R}^3$ er givet ved $U = \mathrm{span}((1, 2, 3))$. Opskriv hvad den direkte sum $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ giver for vektoren $(2, 4, -1)$.

  Regn 6.15.

  Ortogonal projektion: Eftervis nr. 2,3,5 blandt påstandene over 6.35.

  Brug den almene formel for P_U, jvf. 6.35 i [A], til at finde $P_U(2, 4, -1)$ i opgaven ovenfor. (Ser det bekendt ud?)

- **11.15–12.00:** Vi tager hul på kapitel 7, og skal i 7.1–7.8 stifte nærmere bekendtskab med operatorer T, der er *selv-adjungerede* ($T^* = T$) eller *normale* ($T^*T = TT^*$).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Sidste gang nåede vi til og med Corollary 7.7 i [A] om operatorer $T \in \mathcal{L}(V)$ der er *selvadjungerede* henholdsvis *normale*:

$$T^* = T \quad \text{henholdsvis} \quad T^*T = TT^*. \tag{17}$$

I bedes repetere dette, inklusive resultaterne 7.1–7.7 og definitionen af adjungeret operator.

11. gang, tirsdag den 27. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter her med kapitel 7 fra side 132. Emnet er PE-kursets første sande hovedresultat:

  spektralsætningen.

  Som optakt kan I læse bemærkningen i Lay's bog (fra basis) *efter* Thm. 7.1.

  Vi skal på afgørende måde udnytte, at operatorer har *øvre trekantsmatricer* mht. passende baser; repeter derfor 6.28 og 5.13.

- **9.00–11.00:** Opgaver:

  Matrixtilordning: Opskriv mindst 8 (otte) gode resultater for den afbildning $\mathcal{L}(V, W) \to \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{L})$, der er givet ved matrixtilordningen $T \mapsto \mathcal{M}(T)$.

  Minimering: Regn 6.21.

  Adjungeret afbildning: Regn 6.26+27+30.

  Øvre trekantsmatrix: Dyrk opgave 6.14. Opskriv også matricen.

  Ortogonale projektioner: Lav 6.17–18.

  Selvadjungerede operatorer: Gennemsku 7.9 og regn 7.3.

  Gamle opgaver dernæst.

- **11.15–12.00:** Mere om *spektralsætningen* 7.9 og den reelle udgave i 7.13.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

12. gang, fredag den 30. oktober.

- **8.15–9.00:** Her beviser vi den reelle spektralsætning fra kapitel 7 i [A] og gennemgår 7.37 og 7.38 om ortogonale/unitære operatorer (også kaldet lineære isometrier).

- **9.00–11.00:** Blandt opgaverne ser vi på:

  Den storplettede ugle: Matricen A for dette diskrete dynamiske system er ikke selvadjungeret (hvorfor?).

  Udsiger spektralsætningen så, at A ikke er diagonaliserbar ?

  Ortogonale/unitære matricer: Udregn O^*O for

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \mathrm{i}\sqrt{2}/2 & -\mathrm{i}\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

  Er disse matricer unitære ? Udgør søjlerne ortonormale baser ?

  Ortogonal diagonalisering: Skriv $A = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ på formen PDP^{-1}. (*Vink:* Brug spektralsætningen.)

  Selvadjungerede operatorer: Lav 7.2+3+9.

  Normale operatorer: Lav 4.6–7.

  Regn opgaver fra sidst, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her begynder vi på teorien for lineære differentialligninger, hvor vi følger [P]. Vi vil få rig lejlighed til at udnytte lineær algebra, som vi har lært det i [A] — og mere endnu (!) men det vil ofte være en stor hjælp til at gennemskue sagerne.

  Vi når antageligt afsnit 1.2–1.3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Vi nåede sidste gang til og med side 7 i [P] — og talte en del om den farlige notation blot at skrive x, x' osv. når der menes $x(t)$, $x'(t)$ osv.

13. gang, tirsdag den 3. november.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.2 i [P] og går igang med afsnit 1.3: Her skal vi møde eksponentialfunktionen af en *matrix* !
- **9.00–11.00:** Opgaver i følgende emner:

  Selvadjungerede operatorer: *Kontroller* eksemplet øverst side 136 i [A].

  Unitære operatorer: Bevis at spektret for $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ som operator på $\mathbb{C}^2$ er lig med $\{ -e^{\mathrm{i}\,\theta}, e^{\mathrm{i}\,\theta} \}$.
  Giv 3 begrundelser for at operatoren er unitær. (Se Thm. 7.36+7.37.)

  Spektralsætningen: Skriv $A = \left(\begin{smallmatrix}2 & 1 \\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ som $A = PDP^{-1}$, hvor P er *ortogonal*, jvf. sidste gang.
  Udnyt dette i ligningen

  $$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1/2. \tag{19}$$

  Vis at koordinatskiftet $\left(\begin{smallmatrix}y_1 \\ y_2\end{smallmatrix}\right) = P^T \left(\begin{smallmatrix}x_1 \\ x_2\end{smallmatrix}\right)$ fører ligningen (19) over i

  $$y_1^2 + 3y_2^2 = 1. \tag{20}$$

  Udled at løsningsmængden er en *ellipse* ! Tegn denne !
  (Metoden her kaldes diagonalisering af kvadratiske former.)

  Faseportrætter: Regn opgave 1.1.3 i [P].

  Diagonalisering: Lav opgave 1.2.1 i [P].
- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.3–1.4 i [P].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Vi nåede sidste gang til og med side 11.

Udgangspunktet var, at den sædvanlige eksponentialfunktion (som det forklares på Mat2) for hvert $t \in \mathbb{R}$ er fremstillet som en konvergent række:

$$e^t = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} t^k =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}. \tag{21}$$

Man definerer derfor eksponentialmatricen e^A i analogi hermed,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k; \qquad A \in \operatorname{Mat}(n, \mathbb{L}). \tag{22}$$

Dette er hovedemnet for kapitel 1.3–4, hvor vi skal se at denne matrix har rigtig mange egenskaber til fælles med eksponentialfunktionen, og derfor fortjener at blive betegnet med e^A. Bogen forudsætter her visse ting, som I først møder på Analyse 2. Men vi finder en anden vej til målet.

I definitionen af e^A bruger vi *operatornormen* til at forklarer hvad konvergens af rækken betyder. Generelt er en *norm* på et vektorrum V over $\mathbb{L}$ en afbildning $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ som opfylder:

$$\text{(i) } \|v\| \geq 0 \quad \text{for alle } v \in V, \text{ og kun } = 0 \text{ for } v = 0; \tag{23}$$

$$\text{(ii) } \|\lambda v\| = |\lambda| \|v\| \quad \text{for alle } \lambda \in \mathbb{L} \text{ og } v \in V; \tag{24}$$

$$\text{(iii) } \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{for alle } u, v \in V. \tag{25}$$

Bemærk at et normeret vektorrum V altid har en metrik (=afstandsfunktion) induceret ved at sætte $d(u, v) = \|u - v\|$. Specielt er dette tilfældet for matricer med operatornormen, hvor $d(A, B) = \|A - B\|$.

Konvergens af en matrixfølge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mod A betyder at $\|A_n - A\| \to 0$ for $k \to \infty$. NB ! Dette gælder netop når der er konvergens af matrixelementerne på alle pladser. Thi sidste gang viste vi om $A = (a_{jk})$ at

$$|a_{jk}| \leq \|A\| \leq \sqrt{\sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2}. \tag{26}$$

Næste gang vil vi give et direkte bevis for konvegensen af e^A, hvori afsnitsfølgen $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$ ses at være en Cauchy-følge, og derfor er konvergent.

14. gang, fredag den 6. november.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.3 efter retningslinierne ovenfor.

- **9.00–11.00:** Opgaver om

  Faseportræt: Lav 1.2.2.

  Eksponentialmatrix: Find e^{tA} for matricen i opgave 1.2.2!

  Højere orden: Vis at en reel/kompleks funktion $x(t)$ løser andenordens ligningen $x'' + ax' + bx = f(t)$ hvis og kun hvis vektorfunktionen $y = (x_1, x_2) = (x, x')$ er løsning til et førsteordens system af formen $y' = Ay$. Find A.

  Regn dernæst (dele af) 1.2.3.

  Komplekse løsninger: Vis at når $A_{n,n}$ er reel, så har $x' = Ax$ løsningen $x(t)$ hvis og kun hvis $\operatorname{Re} x(t)$ og $\operatorname{Im} x(t)$ begge er løsninger.

  Begyndelsesværdiproblemer: Regn 1.2.4.

- **11.15–12.00:** Vi forsætter med kapitel 1.4, hvori vi ser at $x(t) = e^{tA}x^0$ er løsningen til $x' = Ax$, $x(0) = x^0$.

  Desuden tager vi en stor bid af kapitel 1.5, hvori løsningen $x(t) = e^{tA}x^0$ analyses kvalitativt ud fra A's egenværdier.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Sidste gang nåede vi til og med side 14 i en grundig gennemgang.

Blandt andet beviste vi direkte, at konvergensen af rækkeudviklingen for eksponentialfunktionen e^t, $t \in \mathbb{R}$, overføres til konvergens af rækken for eksponential*matricen* e^A.

I det følgende skal vi se på konsekvenserne for eksistensen og entydigheden af løsningerne til førsteordens differentialligningssystemer:

15. gang, fredag den 13. november.

- **8.15–9.00:** Her gennemgås kapitel 1.4 og et uddrag af 1.5.
- **9.00–11.00:** Opgaver i emnerne

  Operatornorm: Regn opgave 1.3.3+2, og evt. 1.3.4.

  Eksponentialmatricer: Regn 1.3.5 og 1.3.7.

  Førsteordens systemer: Lav opgave 1.4.3+4.

  Dernæst gamle opgaver, hvis der er tid til overs.
- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.6 mm.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

Sidste gang gennemgik vi kapitel 1.5 i [P] og kapitel 1.6 til og med korollaret side 29.

16. gang, fredag den 20. november.

- **8.15–9.00:** Her vil vi gennemgå følgende

  Sætning: *Matricen* e^{tA} *har indgange* $e_{ij}(t)$*, der alle er linearkombinationer af* eksponentialpolynomier $t^k e^{t\lambda}$*, hvorved* λ *er en egenværdi for* A *af multiplicitet mindst* $k+1$.

  Vi baserer os på Theorem 5.13 i [A] om øvre trekantsmatricer. REPETER denne ! Repeter også den tilhørende faktorisering $A = PDP^{-1}$. En del af beviset vil være henlagt til den første opgave nedenfor !

  Dernæst vil vi fortsætte med 1.6 og 1.7 i [P].

- **9.00–11.00:** Opgaver:

  Differentialligninger med *øvre trekantsmatrix*: Bevis at

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{n-1} & u_{n-1,1} \\ 0 & \dots & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$$

  har løsningsmængden bestående af de funktioner, der kan skrives på formen

$$y_j(t) = \sum_{k=j}^{n} p_{jk}(t) e^{\lambda_k t},$$

  hvor hvert $p_{jk}(t)$ er et polynomium med $\mathrm{grad}(p_{jk}) \le \nu_k - 1$, idet ν_k er det antal gange λ_k optræder i diagonalen (dvs. multipliciteten af λ_k som egenværdi). *Vink:* Vis først påstanden for $y_n(t)$.

  Faseportrætter: Regn opgave 1.5.1.

  Løsninger: Regn opgave 1.4.7. *Vink:* Man skal nok bruge sidste del af næste opgave.

  Kontinuitet af regneoperationer: Lad V være et normeret vektorrum over $\mathbb{L}$. Vis da at begge regneoperationer er kontinuerte. Dvs.

$$u_n \to u,\ v_n \to v \implies u_n + v_n \to u + v \tag{27}$$
$$\lambda_n \to \lambda,\ v_n \to v \implies \lambda_n v_n \to \lambda v \tag{28}$$

Gælder det samme for matricer ?
Bevis også at der om $A, A_k \in \mathrm{Mat}(n;\mathbb{L})$ og $v, v_k \in \mathbb{L}$ gælder

$$A_k \to A,\ v_k \to v \implies A_k v_k \to Av.$$

Slut endelig at $e^A x = (\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k)x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k x$ for alle $x \in \mathbb{L}^n$.

- **11.15–12.00:** Vi gør kapitel 1.7 færdigt her.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 16

Sidste gang udledte vi et alment resultat om strukturen af indgangene i en eksponentialmatrix e^{tA}. (Notat derom blev udleveret.)

Som konsekvens af heraf fik vi det stabilitetsresultat for en løsning til $x' = Ax$, at når $\operatorname{Re}\lambda < 0$ for enhver egenværdi til A, da gælder at

$$\|x(t)\|_{\mathbb{C}^n} \to 0 \quad \text{for} \quad t \to \infty.$$

17. gang, fredag den 27. november.

- **8.15–9.00:** Vi gennemgår hovedpunkterne fra kapitel 1.7 i [P] og runder af med lidt stabilitetsteori fra 1.9.
- **9.00–11.00:** Opgaverne er i emnerne:

  Strukturen af eksponentialmatricer: Til illustration regnes følgende: Antag $A_{2,2}$ een egenværdi λ med i-dimensionalt egenrum udspændt af u. Vis at når v ej er parallel med u, da har $x \mapsto Ax$ i basen (u, v) matricen $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ for et passende α.
  Vis også at løsningsmængden for $x' = Ax$ har formen

  $$x(t) = e^{t\lambda}(c_1 u + c_2(\alpha t u + v)). \tag{29}$$

  Er dette troligt i lyset af strukturen af e^{tA} ?

  Eksponentialmatricer: Regn 1.6.1.

  (U)Stabile underrum: Lav 1.6.2.

  Desuden opgaver fra sidste gang.
- **11.15–12.00:** Her skal vi frem til Theorem 3 side 131. Vi skal som hjælpemiddel møde Liapunov-funktioner, som er et berømt trick, der groft sagt består i at finde en hjælpefunktion V, der opfører sig som energien i et mekanisk system: Den bliver mindre som tiden går (t vokser), og hvis systemet kommer i en ligevægtstilstand, så er det fordi energien ikke *kan* blive mindre ! (For os betyder det, at et stabilt ligevægtspunkt vil være et globalt minimumspunkt for hjælpefunktionen V.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 17

18. gang, fredag den 4. december.

- **8.15–9.00:** Vi gennemgår mere mere om Lyapunov funktioner med deres betydning og eksempler samt bevis for sætning 2.9.3.
- **13.15–15.15:** Her er der opgaver i:

  Lineære systemer: Lav opgave 1.7.1 (a), 1.7.2 (b) og 1.7.3 (b).

  Stabilitetsteori: Regn 1.9.3+4.

  Lyapunovfunktioner: Regn 2.9.3.
- **11.15–12.00:** Vi går videre med et bevis for sætning 2.9.1 (i let modificeret udgave), idet beviset baseres på konstruktion af en Lyapunov funktion (vi bruger et par sider i bogen fra sidste år på dette punkt).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 18

Sidste gang fik vi som optakt til sætning 2.9.1 gennemgået lidt om *linearisering*; afsnit 2.6 har en mere udførlig beskrivelse med eksempler.

I fortsættelsen vil vi møde *kvadratiske former*. Disse er funktioner på $\mathbb{R}^n$ som vha. en symmetrisk matrix $Q_{n,n} = (q_{i,j})$ kan skrives på formen

$$f(x) = x^T Q x = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j q_{jk} x_k.$$

Som vi skal se kan disse, fordi Q er symmetrisk, analyseres på afgørende måde ved diagonalisering. Hertil skal vi udnytte den reelle spektralsætning og faktoriseringen $A = PDP^{-1}$, hvor $P^{-1} = P^T$. REPETER BEGGE DELE !

19. gang, tirsdag den 11. november.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med beviset for sætning. 2.9.1, efter retningslinierne antydet ovenfor.

- **13.15–15.15:** Opgaveregning:

  Ækvivalens: Eftervis at enhver norm $|||x|||$ på $\mathbb{R}^n$ er ækvivalent med den euklidiske $\|x\|$. Dvs. at der findes konstanter $c_1 \le c_2$ så

  $$c_1\|x\| \le |||x||| \le c_2\|x\| \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{30}$$

  Gyser-skalarproduktet: Eftervis påstanden fra beviset for sætning 2.9.1 om at grænseværdien

  $$\langle\, x,\, y\,\rangle = \lim_{N\to\infty} \int_0^N e^{tA}x \cdot e^{tA}y\, dt \tag{31}$$

  eksisterer for ethvert par $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

  Lyapunov funktioner: Regn 2.9.4+5.

- **15.30–16.15:** Her tager vi hul på den almene teori med Eksistens- og Entydighedssætningen (bevis følger på Mat2) med dens betingelser og konsekvenser, idet vi følger afsnit 2.1 og 2.2 (i uddrag).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 19

Sidste gang fik vi givet et bevis for Theorem 2.9.1 (uden uligheden) og gennemgået afsnit 2.1.

20. gang, fredag den 11. december.

- **8.15–10.00:** Vi fortsætter med et helt centralt emne i teorien for differentialligninger: Eksistens- og entydighedssætningen, jvf. side 74.

  Som afrunding af teorien gennemgås Theorem 2.4.1–3 om *maksimale* definitionsintervaller.

- **10.00-12.00:** Opgaver:

  Eksistens- og entydighed: Find den maksimale løsning til problemet

  $$x'(t) = 1 + x(t)^2, \qquad x(\pi) = 0. \tag{32}$$

  Giv TO grunde til at $|x(t)| \to \infty$ for $t \to \frac{3\pi}{2}^-$.

  Stabilitet: Regn 2.9.2.

  Lipschitzbetingelser: Regn først opgave 2.3.11, siden 2.3.8 (evt for $n = 2$) og 2.3.9.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 20

Som lovet bringes her en

Pensumliste.

I "Linear algebra done right" af Sheldon Axler har vi læst kapitlerne 1–3 og 5–7 frem til og med side 150; dog ikke side 91–93 og 138–147 midt.

Fra "Differential equations and dynamical systems" af Lawrence Perko har vi gennemgået

kapitel 1: Kapitel 1 pånær afsnittene 1.8 og 1.10.

kapitel 2: Kapitel 2.1 og 2.2 uden bevisdetaljer for Eksistens- og Entydigheds-sætningen; afsnit 2.4 frem til sætning 2.4.2, som blev omtalt uden bevis. Endelig afsnit 2.9 inklusive et særskilt bevis for sætning 2.9.1 (jvf. udleveret notat).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen