Oversigt nr. 1

I PE-kurset i skal vi bruge

[A] Sheldon Axler: *Linear algebra done right*, 2nd ed., Springer.

[P] Lawrence Perko: *Differential equations and dynamical systems*; Springer.

Groft sagt begynder vi med at gennemgå kapitel 1–3, 5–7 i [A] i løbet af de første 10 seancer. Jævnfør skemaet på næste oversigt.

I kan med fordel læse til og med side 8 i [A] som forberedelse til første gang.

1. gang, fredag den 2. september. Efter en kort introduktion til kurset bliver programmet:

- **8.15-9.00:** Vi tager hul på [A] og stiler mod at nå "Subspaces" i kapitel 1.
- **9.00–11.00:** Her er programmet opgaveregning:

  Kapitalformlen: Bevis ved induktion efter n, at den simple differensligning $K_{n+1} = (1 + r)K_n$ (hvor r betegner rentefoden, f.eks. $r = 0,07$ ved 7% p.a.) har løsningen
  $$K_n = (1 + r)^n K_0. \tag{1}$$
  Hvis man som 20-årig anbringer 10000kr. til 10% p.a, hvad er så K_{14} ? (Mange køber hus når de er 35-40.) Og K_{40} ? (mange køber sommerhus, når de er 60.)
  Hvad får man, circa, ved at placere 10000kr. til 10% p.a. hvert år som 20–24 årig ? K_{14} ? K_{40} ?

  Iteration: Man kan bestemme $\sqrt{2}$ f.eks. ved at indføre $f(x) = x^2$ og at
  $$x_{k+1} \approx x_k + f'(x_k)^{-1}(f(x_k) - f(x_{k-1})), \tag{2}$$
  Prøv at indsætte $x_0 = 1,4$ og $x_1 = 1,41$ osv.

  Om $\mathbb{C}$: Regn 1.1+2 i [A].

  Om vektorrum: Regn 1.3 i [A].

  Om underrum: Lav 1.5–8 i [A].

- **11.15–12.00:** Her gennemgår vi resten af Kapitel 1 om *sum* af underrum.

2. gang, mandag den 6. september.

- **12.30–13.15:** Vi begynder på kapitel 2 og stiler mod at nå 2.6.
- **13.15–15.15:** I opgaveregningen ser vi på **Nulreglen:** Bevis at $\lambda v = 0 \iff \lambda = 0$ eller $v = 0$. Dernæst resten af opgaverne til kapitel 1 i [A].
- **15.30–16.15:** Vi fortsætter med kapitel 2 i [A], til og med 2.17.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

edenfor er en oversigt over (den tilstræbte) gennemgang af [A].
Emneordene er glimrende **STIKORD** i forbindelse med **selvoverhøring**...

Uge	Dato	Seance	Emneord
35	2/9	1	kapitel 1: Vektorrum, underrum, direkte summer
36	6/9	2	kapitel 2: Lineær (u)afhængighed, frembringelse, baser
	9/9	3	kapitel 2: Baser: supplering/udtyndelse, dimension, Grassmann's dimensionsformel
37	13/9	4	kapitel 3: Lineære afbildninger, nulrum og billedrum, dimensionssætningen; matricer
	16/9	5	kapitel 3: Invertibilitet, koordinattransformationer
38	20/9	6	kapitel 5: Egenværdier og -vektorer, invariante underrum, øvre trekantsmatricer
	23/9	7	kapitel 5: Diagonalisering, basisskifte
39	27/9	8	kapitel 6: Indre produkt, norm; Cauchy–Schwarz' ulighed; ortonormale baser, Gram–Schmidt ortonormalisering
	29/9	9	kapitel 6: Ortogonal projektion, afstandsminimering, adjungerede afbildninger og ditto matricer
	30/9	10	kapitel 7: Normale/selv-adjungerede operatorer, spektralsætningen
40	4/10	11	kapitel 7: Mere om spektralsætningerne, similaritet

Opdateret pér 1. september. Ændringer kan naturligvis forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Vi fik idag gennemgået kapitel 2 til og med Prop. 2.8, dog uden 2.5 og 2.6.

Vi nævnte også følgende **hovedeksempel**: Lad $F(M, \mathbb{L}^n)$ betegne mængden af afbildninger $f\colon M \to \mathbb{L}^n$, hvorved M er en given vilkårlig mængde. Da er $V = F(M, \mathbb{L}^n)$ *også* et vektorrum over $\mathbb{L}$ med de *punktvise* kompositioner:

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m); \qquad (a \cdot f)(m) = a \cdot f(m).$$

Den storplettede ugle: (Repeter dette eksempel fra indledningen til kapitel 5 i Lays bog.) Tilstandsvektorerne $\vec{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$ kan bekvemt anses for at ligge i $\mathbb{C}^3$ pga. komplekse egenværdier for matricen $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0{,}18 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}71 & 0{,}94 \end{pmatrix}$. Her er A lig koefficientmatricen i det diskrete dynamiske system

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k, \quad \text{for} \quad k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

3. gang, torsdag den 9. september. Her er programmet:

- **8.15-9.00:** I [A] fortsætter vi med 2.5+6 og 2.10 om supplering til en basis, frem til 2.13. Undervejs vil lemma 2.4 spille en afgørende rolle.
- **9.00-11.00:** Opgaverne bliver her følgende:

Frembringersæt: Frembringer $((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1),(2,3,4))$ $\mathbb{C}^3$?

Baser: Vis at $B = ((1,0,0),(1,1,0),(0,1,1))$ er en basis for $\mathbb{C}^3$. Find koordinaterne for $(1+\mathrm{i}, 2+\mathrm{i}, 2)$ mht. B.

Lineær uafhængighed: Vis at hvis $(u_1, u_2, \dots, u_m)$ er lineært uafhængigt, så er også $(u_2, \dots, u_m)$ et lineært uafhængigt sæt. Gælder det samme for ethvert delsæt ? Regn opg. 2.2+3.

Endelig dimension: Hvorfor har en linie gennem origo i $\mathbb{R}^3$ endelig dimension ? (Parameterfremstilling !) — hvad med en plan i $\mathbb{R}^3$?

Gennemsku opg. 2.5 !

Almene vektorrum: Vis at $\mathbb{R}^n = F(M, \mathbb{L})$ når man tager $M = \{1, 2, ..., n\}$ og $\mathbb{L} = \mathbb{R}$, idet $f \in F(\{1, 2, ..., n\}, \mathbb{R})$ da har sin værdimængde $f(\{1, 2, \dots, n\})$ organiseret som $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Beskriv dernæst $\mathbb{C}^n$ som et rum af formen $F(M, \mathbb{L})$.

Fortsæt med eksemplet $\mathbb{L}^\infty$ fra [A].

Lad $F(M, U)$ være mængden af afbildninger $f\colon M \to U$, hvor M er en vilkårlig mængde og U er et givet vektorrum over $\mathbb{L}$. Eftervis da at $V = F(M, U)$ er et vektorrum over $\mathbb{L}$.

Anvendelser: Vis at en *løsning* $\vec{x}_k$ til "uglens system" (3) faktisk er et element i $F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$, som er et komplekst vektorrum, jævnfør ovenfor.

- **11.15–12.00:** Vi fortsætter her med resten af kapitel 2, hvor vi skal beskæftige os med begrebet *dimension* på en seriøs måde.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

4. gang, mandag den 13. september.

- **12.30–13.15:** Vi runder af med begrebet *dimension* og begynder på kapitel 3 i [A] om lineære afbildninger.
- **13.15–15.15:** Ved øvelserne regnes opgaver om:

Frembringelse: Udspændes $\mathbb{R}^2$ af $(1,0)$? Er $\mathbb{C}^1$ frembragt af vektoren 1 ? Find et frembringersæt for rummet $\mathcal{P}_m(\mathbb{L})$.

Supplering: Suppler $(1,0)$ til en basis for $\mathbb{R}^2$. Samme for $(1,2,\mathrm{i})$ i $\mathbb{C}^3$.

Grundbegreber: Lad $U \subset \mathbb{R}^3$ bestå af de (x,y,z), som for $s,t \in \mathbb{R}$ opfylder

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Find et *frembringersæt* for U. Bestem et lineært *uafhængigt* sæt i U. Angiv en *basis* B for U, og bestem *koordinaterne* for $u = (3,2,11)$. Suppler B til en basis B' for $\mathbb{R}^3$. Angiv koordinaterne for u mht. B'. Hvad er $\dim U$? Er dette en modstrid med at u er et tripel ?

Udtynding: *Udtynd* $((1,1),(2,-3),(3,-2))$ til en basis for det komplekse rum $\mathbb{C}^2$. (Overvej hvorfor du/I fik et frembringersæt for $\mathbb{C}^2$.)
Kan sættet

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

udtyndes til en basis for $\mathbb{C}^3$?

Polynomier: Vis at $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ er et underrum af $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Kontroller at $B = (1,x,x^2,\dots,x^m)$ er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ og find $\dim \mathcal{P}_m$.
Godtgør at polynomierne, for fastholdt $a \in \mathbb{R}$,

$$S_a = (1, x-a, (x-a)^2, \dots, (x-a)^m) \tag{4}$$

er et frembringersæt for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$. (*Vink:* Brug Taylors formel.) Vis også at sættet S_a er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.
Er S_a en 'smartere' basis end B ? Prøv at Taylor-udvikle $\sin x$ i $a = \pi/2$ til orden $m = 2$ og skrive polynomiet i basen B — fremskridt eller tilbageskridt ?

Baser: Regn opgaverne 2.8+14.

Direkte sum: Lav 2.10+13+17.

- **15.30–16.15:** Her gennemgår vi kapitel 3 frem til side 50 om matricer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Idag fik vi gjort kapitel 2 færdigt. Læs hjemme beviset for Proposition 2.19 og skriv det ud i alle detaljer ! (Vælg basis vektorer u_{jk}, hvor $k = 1, \dots, \dim U_j$ for hvert underrum U_j.)

I kapitel 3 bør I se grundigt på eksemplerne — regn efter at afbildningerne er lineære !

5. gang, torsdag den 16. september. Hovedemne: Linearitet.

- **8.15–9.00:** Vi fortætter med kapitel 3 om lineære afbildninger og matricer.
- **9.00–11.00:** Opgaveregningen fokuserer på:

  Lineær Uafhængighed: Hvorfor er Lemma 2.4 stadig korrekt, hvis man fjerner forudsætningen om at $v_1 \neq 0$?

  Regn 2.5+7+6 i nævnte rækkefølge.

  Linearitet: Eftervis at $T\colon V \to W$ er lineær netop når

  $$T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv \tag{5}$$

  for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{L}$ og alle $u, v \in V$.

  Verificer påstanden s. 41 øverst om at ST er lineær.

  Regn endelig opgave 3.2 og 3.3 (brug at U har et komplement).

  Billedrum: Giv dit eget bevis for at billedmængden for en lineær afbilding er et underrum.

  Injektivitet: Hvad er nulrummet for $(x, y) \mapsto x + 2y$? Er denne afbildning injektiv ?

  Lav 3.5.

  Surjektivitet: Godtgør påstandene om surjektivitet midt på s. 44.

  Regn dernæst 3.7.

  Dimensionssætningen: 3.9+11+12.

  To udfordringer: Lav 3.8 og 3.16. (Hvorfor må uligheden i opgaven forventes?)

  Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her gør vi kapitel 3 færdigt.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Vi nåede idag resten af kapitel 3. Næste gang skal vi se at Proposition 3.14 giver en simpel diskussion af

Koordinatttransformation: Når et vektorrum V har to baser $B = (v_1, \dots, v_n)$ og $C = (w_1, \dots, w_n)$, så kan enhver vektor $v \in V$ skrives på to måder:

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \cdots + \mu_n w_n. \tag{6}$$

Dette giver i første omgang to forskellige koordinatsøjler for v, nemlig

$$\mathcal{M}(v, B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M}(v, C) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Kendes blot den ene kan den anden bestemmes ved hjælp af koordinatransformationsmatricen K, idet

$$\mathcal{M}(v, C) = K \cdot \mathcal{M}(v, B). \tag{8}$$

NB ! Her er $K = \mathcal{M}(I, B, C)$ når $I\colon V \to V$ betegner den identiske afbildning, og formlen (8) følger *direkte* af Proposition 3.14, når denne bruges på I.

F.eks. har $v = (1, 7)$ koordinatsøjlen $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right)$ mht. den naturlige basis $E = (e_1, e_2)$; desuden kunne man indføre basen $C = (w_1, w_2)$, hvor $w_1 = (1, -1)$, $w_2 = (1, 1)$. Idet

$$e_1 = \tfrac{1}{2} w_1 + \tfrac{1}{2} w_2, \qquad e_2 = -\tfrac{1}{2} w_1 + \tfrac{1}{2} w_2, \tag{9}$$

sluttes (af side 48 i [A]) at $K = \mathcal{M}(I, E, C) = \left(\begin{smallmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{smallmatrix}\right)$, hvorfor (8) giver

$$\mathcal{M}(v, C) = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Kontrol: $-3(1, -1) + 4(1, 1) = (4 - 3, 3 + 3) = (1, 7) = v$.

6. gang, mandag den 20. september.

- **12.30–13.15:** Først afrundes kapitel 3 med konsekvenserne for koordinattransformationer. Læs og forstå ovenstående hjemmefra, så lægger vi hovedvægten på matricers transformation.

  Dernæst tager vi i kapitel 5 et gensyn med egenværdier og egenvektorer. Desuden skal I møde invariante underrum: Hvis $T \in \mathcal{L}(V)$, så kaldes et underrum $U \subset V$ *invariant* ved T, hvis $T(U) \subset U$.

- **13.15–15.15:** Opgaver i flg. emner:

Matricer: Find $w = T(1,1)$, når T er som *midt* på side 49 i [A]. Bestem dernæst $\mathcal{M}(w)$ ved at bruge T's matrix.

Indfør nu basen $B = ((2,0),(1,-1))$ for $\mathbb{L}^2$ foruden den naturlige basis E for $\mathbb{L}^3$. Hvad er da $\mathcal{M}(1,1)$ og $\mathcal{M}(T; B, E)$? Brug disse til at bestemme $\mathcal{M}(w)$.

Lav 3.19.

Koordinater: Regn 3.20. Er der en isomorfi her ?

Dimensionssætningen: Regn 3.26+10.

Inverterbarhed: Vis at hvis $T \in \mathcal{L}(V)$ er inverterbar, så har matricen $\mathcal{M}(T)$ (mht. en fast valgt basis for V) en invers *matrix* og

$$\mathcal{M}(T)^{-1} = \mathcal{M}(T^{-1}). \tag{11}$$

Formuler og bevis et omvendt resultat hertil !

Anvendelse: I (8) er matricen K inverterbar — begrund hvorfor !

Inverser: Gennemsku 3.22 (*vink:* Hvad kunne $(ST)^{-1}$ være ?). Og den overraskende 3.23.

Injektiv: Lav 3.14 (brug opgave 3.3 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *højreinvers* er !?

Surjektiv: Lav 3.15 (brug opgave 3.8 til konstruktionen af S). Har du/I et bud på, hvad en *venstreinvers* er !?

- **15.30–16.15:** Her fortsættes frem mod Theorem 5.18.

Den storplettede ugle: I forbindelse med differensligningen (jvf. Lays bog kap. 5)

$$\vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{12}$$

kan man indføre $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_k, \ldots)$, som er element i det tidligere indførte vektorrum $V = F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$. Da udgør løsningerne et *underrum* $U \subset V$: Dvs., for alle skalarer $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ og alle løsninger x, y fås en ny løsning $z \in V$, nemlig

$$z = \lambda x + \mu y = (\lambda\vec{x}_0 + \mu\vec{y}_0, \ldots, \lambda\vec{x}_k + \mu\vec{y}_k, \ldots).$$

Dette kan vises direkte, men også ved at se, at løsningerne udgør et nulrum for en lineær afbildning: $\mathcal{A}\colon V \to V$ kan defineret ved $\mathcal{A}x = (A\vec{x}_0, \ldots, A\vec{x}_k, \ldots)$ er lineær; desuden rummer $\mathcal{L}(V)$ skifteoperatoren $\mathcal{S}x = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_{k+1}, \ldots)$, jvf. side 39 i [A]. Ligningen (12) er ækvivalent med at $\mathcal{S}x = \mathcal{A}x$ og derfor med

$$(\mathcal{S} - \mathcal{A})x = 0 \quad \text{eller med} \quad x \in \operatorname{Null}(\mathcal{S} - \mathcal{A}). \tag{13}$$

Derfor siges differensligningen (3) at være *lineær*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Som I kan se, springer vi kapitel 4 i [A] over. Dette skyldes især, at vi alligevel ikke kan overkomme at bevise algebraens fundamentalsætning (4.7) på dette semester. (I vil senere på MAT 2 se et smart bevis, der ikke bruger lineær algebra.)

Man kan dog med fordel orientere sig om indholdet af kapitel 4. En god indgangsvinkel kunne være Korollar 4.8, som vi har brugt direkte i beviset for Theorem 5.10 (indse dette !). Prøv evt. at følge beviset for at Korollar 4.8 er en konsekvens af algebraens fundamentalsætning 4.7.

7. gang, torsdag den 23. september.

- **8.15–9.00:** Vi stiler mod at nå Prop. 5.18.

- **9.00–11.00:** Opgaver i:

  Matricer: Find matricen for $T = \frac{d}{dx}$ når $V = \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ udstyres med basen $(1, x, x^2, \dots, x^m)$.
  Ekstra: Hvorfor er $\lambda = 0$ eneste egenværdi? Er dette overraskende?

  Den storplettede ugle(=anvendelse af teorien): Indse først, at der til hvert $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ findes et og kun et $x = (\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_k, \dots) \in F(\mathbb{N}_0, \mathbb{C}^3)$ som opfylder

  $$\begin{cases} \vec{x}_{k+1} = A_{3,3}\vec{x}_k \quad \text{for} \quad k \in \mathbb{N}_0 \\ \vec{x}_0 = \vec{v}. \end{cases} \tag{14}$$

  Vink: Man kan vise enhver løsning nødvendigvis har formen $x = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$; og omvendt at denne vektorfølge faktisk løser begyndelsesværdiproblemet ovenfor.
  Med andre ord er $\Phi(\vec{v}) = (\vec{v}, A\vec{v}, A^2\vec{v}, \dots)$ en bijektion af $\mathbb{C}^3$ på løsningsmængden, kaldet X, til selve *differens*ligningen.
  Vis at Φ er en isomorfi $\mathbb{C}^3 \to X$, samt at $\dim X = 3$. (NB ! Theorem 3.18 i [A] kan ikke bruges som den står; men brug forbemærkningen til den).

  Egenværdier: Regn 5.10.

  Egenvektorer: Regn 5.5 og 5.6.

  Invariante underrum: Lav opg. 5.1 og 5.4.

  Eventuelt gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Resten af kapitel 5 frem til side 90. Desuden lidt om basisskifte i forbindelse med diagonalisering.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Vi nåede i går kapitel 5 frem til side 89 om diagonalisering af operatorer. NB ! Generelt siges en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ at være *diagonaliserbar* hvis den opfylder en (og dermed enhver) af de ækvivalente betingelser i 5.21.

8. gang, mandag den 27. september.

- **12.30–13.15:** Først afrunder vi 5.21 om diagonalisering.

  Dernæst fortsætter vi med kapitel 6 — nu skal vi til at inddrage *skalarprodukter*. Vi vil tage let på de første 2–4 sider, som I bedes læse inden forelæsningen.

- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Diagonalisering: Find samtlige egenværdier og -vektorer for

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

  Brug Sætning 5.21 til at afgøre, om matricerne er diagonaliserbare.

  Den storplettede ugle: Vis at A er diagonaliserbar når

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0,18 & 0 & 0 \\ 0 & 0,71 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

  (Find dens karakteristiske polynomium ved håndkraft, siden rødderne (evt. ved maskinkraft) og bestem egenværdierne. Konkluder så!)

  Udled at der findes $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \in \mathbb{C}^3$ så enhver begyndelsesvektor $\vec{v} \in \mathbb{C}^3$ på entydig måde kan skrives

$$\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + c_3\vec{u}_3.$$

  Bevis at der for enhver løsning $x = (\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k, \dots)$ til differensligningen $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ gælder

$$\begin{aligned} \vec{x}_{k+1} &= c_1 A^k \vec{u}_1 + c_2 A^k \vec{u}_2 + c_3 A^k \vec{u}_3 \\ &= c_1 \lambda_1^k \vec{u}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{u}_2 + c_3 \lambda_3^k \vec{u}_3, \end{aligned} \tag{15}$$

  for komplekse skalarer $\lambda_1 \approx 0,98$, $\lambda_2 \approx -0,2 + \mathrm{i}\,0,21$ og $\lambda_3 \approx -0,2 - \mathrm{i}\,0,21$. Brug egenskaberne ved en *norm* til at udlede at

$$\|\vec{x}_k\|_{\mathbb{C}^3} \to 0 \quad \text{for} \quad k \to \infty. \tag{16}$$

  Hvad betyder dette for uglebestanden ?

Egenværdier og -vektorer: Regn opgave 5.8 og 5.7.

- **15.30–16.15:** Her stiler vi mod at nå 6.28.

9. gang, onsdag den 29. september.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med kapitel 6.
- **9.00–11.00:** Opgaver i emnerne:

  Øvre trekantsmatricer: Regn opgave 5.17.

  Egenværdier: Regn 5.20. Evt. 5.23.

  Gram–Schmidt: Tegn $(2, 1)$ og $(-3, 2)$ og ortonormaliser dem!

  Cauchy–Schwarz: Lav 6.3.

  Indre produkter: Regn 6.6+7.

  Gamle opgaver derefter.
- **11.15–12.00:** Vi gennemgår resten af kapitel 6. Eksemplerne side 114–116 vil kun blive skitserede — men hvis I er bare *lidt* nysgerrige kan I lære en masse om matematik & lommeregnere mm !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

I går nåede vi til og med side 112 i [A].

Som et alment begreb omtalte vi en *norm* på et vektorrum V. Dette er en afbildning $V \to \mathbb{R}$ som typisk skrives $\|x\|$. For at være en norm skal den opfylde tre ting:

(i) $\|x\| \geq 0$, med lighedstegn kun for $x = 0$;

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

(iii) trekantsuligheden: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Som et eksempel gælder i et indre produkt rum at $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ er en norm (jvf. side 102 i [A]). En norm der ikke udspringer af et indre produkt på $\mathbb{R}^n$ er *Mahattan-normen:*

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|.$$

10. gang, mandag den 4. oktober.

- **12.30–13.15:** Her gennemgår vi resten af kapitel 6. Orienter jer hjemmefra om *funktionaler, adjungerede operatorer*.

- **13.15–15.15:** Opgaver:

  Ortonormal: Afgør om vektorerne $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ og $(1, 0, 0)$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^3$. (Nem!)
  Brug Gram–Schmidt ortogonalisering til at finde en o.n.b. for $\mathbb{R}^3$. Skriv så $(1, -1, 0)$ som en linearkombination af de fundne vektorer.

  Gram-Schmidt: Regn 6.10+13.

  Ortogonalkomplement: Vis at $U^\perp$ er et underrum og at $\{0\}^\perp = V$.
  Find $U^\perp$ når $U \subset \mathbb{R}^3$ er givet ved $U = \operatorname{span}((1, 2, 3))$. Opskriv hvad den direkte sum $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ giver for vektoren $(2, 4, -1)$.
  Regn 6.15.

  Ortogonal projektion: Eftervis nr. 2,3,5 blandt påstandene over 6.35.
  Brug den almene formel for P_U, jvf. 6.35 i [A], til at finde $P_U(2, 4, -1)$ i opgaven ovenfor. (Ser det bekendt ud?)

- **15.30–16.15:** Vi tager hul på kapitel 7, og skal i 7.1–7.8 stifte nærmere bekendtskab med operatorer T, der er

  – *selv-adjungerede:* $T^* = T$
  – eller *normale:* $T^*T = TT^*$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Sidste gang nåede vi resten af kapitel 6. Siderne 114–116 var kursorisk stof, omend meget illustrativt for *rækkevidden* af lineær algebra.

Desuden lidt om operatorer $T \in \mathcal{L}(V)$ der er *selvadjungerede* henholdsvis *normale*:

$$T^* = T \quad \text{henholdsvis} \quad T^*T = TT^*. \tag{17}$$

Vi fik omtalt, at en reel matrix A kan være *ortogonalt diagonaliserbar* og vist dette medfører at A er symmetrisk. Se nærmere i Lays bog, afsnit 7.1 side 450 nederst.

11. gang, onsdag den 6. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter her med kapitel 7. Emnet er PE-kursets første sande hovedresultat:

  spektralsætningen.

  Vi skal på afgørende måde udnytte, at operatorer har *øvre trekantsmatricer* mht. passende baser; repeter derfor 6.28 og 5.13.

- **9.00–11.00:** Opgaver:

  Matrixtilordning: Opskriv mindst 8 (otte) gode resultater for den afbildning $\mathcal{L}(V, W) \to \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{L})$, der er givet ved matrixtilordningen $T \mapsto \mathcal{M}(T)$.

  Minimering: Regn 6.21.

  Adjungeret afbildning: Regn 6.26+27+30.

  Øvre trekantsmatrix: Dyrk opgave 6.14. Opskriv også matricen.

  Ortogonale projektioner: Lav 6.17–18.

  Selvadjungerede operatorer: Regn 7.3.

  Gamle opgaver dernæst.

- **11.15–12.00:** Mere om *spektralsætningen* 7.9 og den reelle udgave i 7.13.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi fik idag gennemgået både den reelle og komplekse spektralsætning til og med side 137 i [A]. Desuden blev det nævnt, hvordan mange resultater i kapitel 7 i [A] kan fortolkes bekvemt ved hjælp af de to mængder af komplekse tal:

$$\text{spektret for } T: \qquad \sigma(T) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ er egenværdi for } T \,\} \tag{18}$$

$$\text{den numeriske værdimængde for } T: \qquad \nu(T) = \{\, \tfrac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \mid x \neq 0 \,\}. \tag{19}$$

Som et bekvemt begreb indførte vi følgende

Definition: En operator $T \in \mathcal{L}(V)$ på et indre produkt rum V af dimension $n \in \mathbb{N}$ kaldes *ortogonalt diagonaliserbar* dersom V har en ortonormal basis $(e_1, \dots, e_n)$ bestående af egenvektorer for T.

I så fald har T en såkaldt *spektralfremstilling*:

$$T = \lambda_1 P_{E_{\lambda_1}} + \dots + \lambda_m P_{E_{\lambda_m}}, \tag{20}$$

hvor $P_{E_{\lambda_j}}$ er ortogonalprojektionen på egenrummet E_{λ_j} hørende til den j'te egenværdi λ_j. —Spektral*sætningen* udsiger hvornår T har en sådan fremstilling !

12. gang, mandag den 11. oktober.

- **12.30–13.15:** Her gennemgår vi 7.36 og 7.37 i [A] om ortogonale/unitære operatorer (også kaldet lineære *isometrier*).

- **13.15–15.15:** Blandt opgaverne ser vi på:

  Den storplettede ugle: Matricen A for dette diskrete dynamiske system er ikke selvadjungeret (hvorfor?).

  Udsiger spektralsætningen så, at A ikke er diagonaliserbar ?

  Ortogonal diagonalisering: Skriv $A = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ på formen PDP^{-1}. (*Vink:* Brug spektralsætningen.)

  Udled spektralfremstillingen i (20) når T er ortogonalt diagonaliserbar. (*Vink:* Brug spektralsætningen til at finde en o.n.b.)

  Selvadjungerede operatorer: Lav 7.2+3+9.

  Normale operatorer: Lav 7.6–7.

- **15.30–16.15:** Her begynder vi på teorien for lineære differentialligninger, hvor vi følger [P]. Vi vil få rig lejlighed til at udnytte lineær algebra, som vi har mødt det i [A] — og mere endnu (!) men lineær algebra vil ofte være en stor hjælp til at gennemskue sagerne.

  Vi når antageligt afsnit 1.2–1.3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Vi nåede sidste gang til og med side 9 i [P] — og talte en del om den farlige notation blot at skrive x, x' osv. når der menes $x(t)$, $x'(t)$ osv.

13. gang, onssdag den 13. oktober.

- **8.15–9.00:** Vi fortsætter med [P] og nu i afsnit 1.3: Her skal vi møde eksponentialfunktionen af en *matrix* !

  I bedes repetere begrebet "en norm" på et vektorrum. Se oversigt nr. 9.

- **9.00–11.00:** Opgaver i følgende emner:

  Normer: *Kontroller* at Manhattan-normen virkeligt er en norm (*nem!*). Se oversigt nr. 9.

  Unitære operatorer: Udregn O^*O for

$$O = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{6}/6 \\ 0 & \sqrt{3}/3 & -\sqrt{6}/3 \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \mathrm{i}\sqrt{2}/2 & -\mathrm{i}\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

  Er disse matricer unitære ? Udgør søjlerne ortonormale baser ?
  Bevis at spektret for $\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ som operator på $\mathbb{C}^2$ er lig med $\{ -e^{\mathrm{i}\theta}, e^{\mathrm{i}\theta} \}$.
  Giv 3 begrundelser for at operatoren er unitær. (Se Thm. 7.36+7.37.)

  Spektralsætningen: Skriv $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ som $A = PDP^{-1}$, hvor P er *ortogonal*, jvf. sidste gang. Forklar at ligningen

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 = 1/2 \tag{22}$$

  er ensbetydende med $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = 1$.
  Vis at koordinatskiftet $\left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right) = P^T \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ fører ligningen (22) over i

$$y_1^2 + 3y_2^2 = 1. \tag{23}$$

  Udled at løsningsmængden er en *ellipse* ! Tegn denne !
  (Metoden her kaldes diagonalisering af kvadratiske former.)

  Faseportrætter: Regn opgave 1.1.3 i [P].

  Diagonalisering: Lav opgave 1.2.1 i [P].

- **11.15–12.00:** Vi fortsætter med kapitel 1.3–1.4 i [P].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen