Oversigt nr. 1

Litteratur: I Matematik 3 bruger vi i efteråret 2012 følgende bog:

E. Kreyzig: *Advanced engineering mathematics*, 10. udg., Wiley, 2011.

Beskrivelse: Kurset vil handle om matematisk analyse indenfor følgende emner:

Vektoranalyse: Gradient, divergens og rotation, samt integralsætninger for disse.

Laplace-transformation: Snedig metode til løsning af 2. ordens differentialligninger.

Fourier-rækker: Hvordan funktioner kan opløses i (uendeligt mange) harmoniske svingninger, og hvornår dette er smart.

Potensrækker: En slags Taylorpolynomier af "uendeligt høj" grad.

Analytiske funktioner: Om at udnytte *komplekse* funktioner til nemmere beregninger, inklusive integration ved residuer.

Praktisk: Vi mødes 14 gange til seancer à 4 timer. Hver seance vil bestå af 90 minutters forelæsning (i Fib.16 lokale 1/108), som efterfølges af 2 timers opgaveregning i grupperummene (opgaver: se de næste sider).

Uge	Dato	Nr.	Emner
36	4/9	1	kapitel 15.1: Talfølger, konvergens. Uendelige rækker.
			kapitel 9.1–4: Vektorer og vektorfelter. Prik- og krydsprodukt.
	7/9	2	kapitel 9.5–9: Kurvelængde, gradient. Divergens og rotation.
			kapitel 10.1–4: Kurveintegraler. Greens sætning.
37	11/9	3	kapitel 10.5–7: Fladeintegraler, Gauss's sætning (divergenssætningen).
	14/9	4	kapitel 10.8–9: Potentialer. Stokes's sætning (rotationssætningen).
38	18/9	5	kapitel 6.1–2: Laplace-transformation, differentialligninger.
	21/9	6	kapitel 6.3–5: Trinfunktionen, Diracs deltafunktion. Foldning.
39	25/9	7	kapitel 6.6–9: Mere om differentiation og differentialligninger.
	28/9	8	kapitel 11.1–2: Fourierrækker I: periodiske funktioner.
40	2/10	9	kapitel 11.2: Fourierrækker II: lige og ulige funktioner.
	5/10	10	kapitel 11.3–4: Fourierrækker III: tvungne svingninger; approximation.
41	12/10	11	kapitel 13: Komplekse funktioner I: kompleks differentiation.
43	25/10	12	kapitel 14: Komplekse funktioner II: kurveintegraler.
			Cauchys integralsætning og -formler.
44	2/11	13	kapitel 15: Komplekse funktioner III: Potens- og Taylorrækker.
45	9/11	14	kapitel 16+17.1: Komplekse funktioner IV: Laurentrækker,
			integration ved residuer. Konform afbildning.

Eksamen: Intern skriftlig prøve med hjælpemidler.

Pensum: Den gennemgåede litteratur i de 14 seancer, der er skemasat.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Tirsdag den 4. september.. Til opgaveregningen repeterer vi lidt om komplekse tal (det er IKKE meningen man skal bruge regnemaskine):

- Skriv brøkerne
$$\frac{6-\mathrm{i}\,4}{1+\mathrm{i}}, \qquad \frac{7+\mathrm{i}\,14}{-\sqrt{5}+\mathrm{i}\,3}$$
på formen $x+\mathrm{i}\,y$ for passende reelle tal x, y.
- Find z^2 og $|z|^2$ når $z=3-\mathrm{i}\,4$. (Overraskende!?)
- Find modulus og (et) argument for $z=2-\mathrm{i}\,2\sqrt{3}$. Skriv z på formen $re^{\mathrm{i}\,\theta}$.
- Find real- og imaginærdelen for $4e^{\mathrm{i}\,\pi/12}$. (Svar: $\sqrt{6}\pm\mathrm{i}\,\sqrt{2}$)!)

Desuden tager vi et par små opgaver om **uendelige rækker**:

- Bestem summen af den uendelige række
$$1+\frac{1}{10}+(\frac{1}{10})^2+\cdots+(\frac{1}{10})^n+\ldots$$
Brug først din intuition ! Brug dernæst en relevant formel og sammenlign !
- Udregn $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots.$
- Brug kvotientkriteriet til at afgøre om følgende rækker konvergerer:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^n}.$$

Tid til overs ? Begynd på opgave 15.1.16+17 i bogen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Fredag den 7. september. Her er der opgaver i uendelige rækker (konvergens/divergens):

- Brug sammenligningskriteriet til at vise at rækken nedenfor konvergerer:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + 2^n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 2} + \frac{1}{\frac{1}{2} + 4} + \dots .$$

- Regn 15.1.16–25. Husk at angive hvilket kriterium du brugte til at finde svarene.

- De entusiastiske kan regne 15.1.30. (*Vink:* Man kan f.eks. begynde med at vise, at rækken opfylder kvotientkriteriet med $q = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$.)

NB ! Som et supplement til Kreyzigs sætninger bør jeg nævne følgende velkendte resultat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \qquad \text{konvergerer hvis og kun hvis} \quad 1 < p < \infty.$$

Desuden er der et resultat om såkaldte *alternerende* rækker:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n \qquad \text{konvergerer når } b_1 > b_2 > \dots > b_n > \dots 0$$
$$\text{og desuden } b_n \to 0 \text{ for } n \to \infty.$$

Begge disse resultater kan være nyttige, både direkte og når man vil bruge sammenligningskriteriet.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Som sagt ved dagens forelæsning: I bør bladre kapitel 9 igennem og nikke til det I kender undervejs—og læse nærmere om de ting, I ikke genkender !

Ligeså med kaptitel 10.1. I de nye emner kan I med fordel gennemregne Kreysigs taleksempler, blot for at afmystificere tingene.

3. gang, tirsdag den 11. september. Her regnes opgaver i følgende emner:

Gradienter/potentialer: Gennemsku opgave 9.7.43–44.

Divergens af vektorfelt: Lav først taleksemplerne i 9.8.1,3. Regn så 9.8.9.

Rotation af vektorfelt: Regn 9.9.5. Overvej om du kan bruge en af formlerne i 9.9.14, og bevis den formel du bruger.

Bevis formlerne i Theorem 9.9.2 (regn løs!).

Linieintegraler: Regn 10.2–6. NB ! Opskriv først en parameterfremstilling for kurverne; brug dernæst definitionen af linieintegraler nederst side 414.

Greens sætning: Kontroller at Greens sætning er korrekt i tilfældet hvor $F = (y, -x)$ og kurven C er cirklen $x^2 + y^2 = 1/4$. (Udregn begge integraler.)

4. gang, fredag den 14. september. Opgaver i de nye temaer:

Linieintegraler: Regn 10.1.7.

Stiuafhængighed: Lav 10.2.3; fortsæt med 10.2.5.

Greens sætning: Øv dig på formlen ved at regne 10.4.3+5+7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

5. gang, tirsdag den 18. september. Her er temaerne:

Greens sætning: Lav 10.4.9+10.

Fladeintegraler: Regn 10.6.1+3.

Divergenssætningen: Regn 10.7.9+10. Også 10.7.13+17

Rotationssætningen: Lav 10.9.13+15+17.

6. gang, fredag den 21. september. Opgaver i følgende emner:

Green, Gauss, Stokes: Lav opgave 10.7.15+16 og 10.9.18+19.

Hyperbolsk sinus og cosinus: Eftervis at $\cosh t = \frac{e^t+e^{-t}}{2}$ og $\sinh t = \frac{e^t-e^{-t}}{2}$ er hinandens afledte:

$$(\cosh t)' = \sinh t, \qquad (\sinh t)' = \cosh t.$$

Begrund at $\sinh t$ er strengt monotont voksende og derfor har en invers funktion, $\sinh^{-1} t$.

Vis at når man betragter punktet $(x, y) = (\cosh t, \sinh t)$ for et vilkårligt reelt tal t, så ligger punktet (x, y) på hyperblen H med ligningen

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Omvendt: Givet et punkt (x_0, y_0) på denne hyperbel, udled da at der findes t_0 sådan at $(x_0, y_0) = (\cosh t_0, \sinh t_0)$. (*Vink:* Man kan begynde med at sætte $t_0 = \sinh^{-1} y_0$; dernæst slutte at $x_0^2 = \cosh^2 t_0$.)

Da H således er parametriseret ved $(\cosh t, \sinh t)$, hvad der er analogt til enhedscirklen, så kaldes disse funktioner *hyperbolsk cosinus, hhv. hyperbolsk sinus*.

Laplace transformation: Bestem $\mathcal{L}(f)$ for funktionerne i opgave 6.1.1+3+5+9+11. (Brug bogen—IKKE computer!)

Lav så 6.1.19+20.

Invers transformation: Regn 6.1.25–30 (brug tabel, IKKE computer!).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Vi har de sidste to gange brugt l'Hôpitals regel ved forelæsningerne. Indtil videre vil jeg henvise jer til wikipedia. Dvs. slå den op på

`http://en.wikipedia.org/wiki/L'Hopital_rule.`

Angående gammafunktionen $\Gamma(x)$ (den 'glatte' forlængelse af $n!$), så kan I se en oversigt i bogens Appendix 3.1 (læseværdigt!).

7. gang, tirsdag den 25. september. Her ser vi på opgaver i emnerne:

Laplacetransformering: Regn 6.2.17+19+21.

Forsæt eventuelt med 6.1.22; man skal bruge gammafunktionen.

Invers transformering: Lav 6.1.31+32 og 6.1.37+39+41.

Gamma-funktionen: Læs om $\Gamma(x)$ side A54 og regn efter at definitionen i (24) giver formlerne i (25)–(26) som påstået. (Nemme!)

Differentialligninger: Regn 6.2.3+5+7.

Skubbede problemer: Prøv med 6.2.15. (Jvf. Ex. 6.2.6.)

8. gang, fredag den 28. september. her var programmet ved opgaveregningen følgende:

Differentialligninger: Opgave 6.2.11+15.

Trinfunktionen: Regn 6.3.3+4+5.

Flytning i s: Regn 6.3.12+13+15.

Diskontinuerte højresider: Lav opgave 6.3.22+23.

Diracs deltafunktion: Regn 6.4.3+5.

Vi nåede ved forelæsningerne idag at gennemgå Fourierrækker i kapitel 11 til og med side 478.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi fortsætter her i kursets 2. halvdel med at gennemgå kapitel 11.1–4 om Fourierrækker.

9. gang, tirsdag den 2. oktober. Her ser vi på opgaver i

Differentialligninger: Regn 6.4.3+5.

Foldning: Lav opgave 6.5.3+7 (nemme!).

Fortsæt med 6.5.11 og 6.5.21+23+25.

Stambrøker: Regn 6.5.26.

Koblede ligninger: Lav 6.7.19 (man kan gå frem som i Ex. 6.7.2).

Fourierrækker: Brug din PC til at plotte $S_{10}(x), S_{20}(x)$ og $S_{30}(x)$ i eksemplet side 478 over intervallet $-4 \leq x \leq 4$.

Den dårlige tilnærmelse i diskontinuitetspunkterne kaldes *Gibbs fænomen*. De interesserede kan se nærmere på

`http://en.wikipedia.org/wiki/Gibbs_phenomenon`.

10. gang, fredag den 5. oktober. Vi regner opgaver i

Periodiske funktioner: Lav 11.1.7+10 (nemme!).

Fourierrækker: Først 11.1.21. Dernæst 11.1.13; er resultatet overraskende?

Fortsæt med 11.1.12+13.

(U)lige funktioner: Lav 11.2.1 og også 11.2.3+4 (nemme!).

Gl. eksamensopgave: Betragt begyndelsesværdiproblemet givet ved $y(1) = 0$, $y'(1) = 0$ og ligningen $y''(t) + 9y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} 0, & \text{for } t < 2, \\ t - 2, & \text{for } t \geq 2. \end{cases}$$

1. (5 point) Omskriv begyndelsesværdiproblemet således at begyndelsesbetingelserne ligger ved $t = 0$.

2. (20 point) Anvend Laplacetransformationen til at finde $y(t)$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

11. gang, fredag den 12. oktober. Vi ser denne gang på følgende opgaver:

Fourierrækker, (u)lige fkt.: Regn opgave 11.2.11. Brug resultatet til at slutte at der (som lovet; jvf. også opgave 11.2.20) gælder at

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

(Hvorfor er Fourierrækken punktvis konvergent?)

Halv-periode udviklinger: Regn 11.2.23. (OBS. (a) er nem!)

Gl. eksamensopgave i Fourieranalyse: (jan. 2012) Betragt differentialligningen $y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = r(t)$, hvor $r(t)$ er den 2π-periodiske funktion defineret ved:

$$r(t) = \begin{cases} \pi^2 - t^2, & \text{for } -\pi \leq t < 0, \\ \pi^2 + t^2, & \text{for } 0 \leq t < \pi. \end{cases}$$

1.(5 point) Vis at r(t) kan skrives som en sum af en lige og en ulige funktion.

2.(10 point) Find Fourierrækken for $r(t)$.

3.(15 point) Find den periodiske partikulærløsning til ligningen.

Gl. eksamensopgave i vektoranalyse: (jan. 2012) Betragt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^6 - z)\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + (x^5z^3 + x)\mathbf{k}$ og fladen S med parameterfremstillingen

$$\mathbf{r}(\rho, \phi) = 2\rho\cos\phi\mathbf{i} + \rho\sin\phi\mathbf{k},$$

hvorved $0 \leq \rho \leq 5$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

1.(5 point) Beregn $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z)$.

2.(10 pint) Beregn $\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \vec{n}\, dA$.

3.(10 point) Beregn $\int_{C_\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, når C_γ betegner kurven med parameterfremstillingen $\gamma(t) = 10\cos t\mathbf{i} + 5\sin t\mathbf{k}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

12. gang, TORSDAG den 25. oktober kl. 12.30–16.15. NB !.

Inden forelæsningen bedes I sikre jer, at I (hver især!) har forstået og kan huske grundbegreberne om komplekse tal i afsnit 13.1–3 i bogen. Vi fortsætter fra afsnit 13.5.

Ved øvelserne ser vi på følgende opgaver (de fleste er helt enkle):

Komplekse tal og funktioner: For hvilke komplekse tal z er funktionen

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z^2-2z-3)} \quad \text{defineret ?}$$

Skitser definitionsmængden for $f(z)$. Dernæst opgave 13.3.1–5 (nemme).

Real- og imaginærdele: Regn 13.3.10–12 (nemme).

Differentiation: Regn 13.3.18–20 (nemme).

Analytiske funktioner: Begrund at ethvert polynomium $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ er analytisk (dvs. differentiabel i ethvert $z \in \mathbb{C}$).

Er p en *hel* funktion ?

Cauchy–Riemanns ligninger: Regn 13.4.2–5.

Gl. eksamensopgave: (jan. 2011) Betragt funktionen $f(z) = |2z + \bar{z}|^2$, hvor $z = x + \mathrm{i}\, y$ for relle tal x, y.

1. Find to reelle funktioner u og v sådan at $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}\, v(x,y)$ for alle z. Vis at $f(z)$ ikke er analytisk.

2. Lad γ betegne cirklen med radius 2, centrum i $z_0 = \mathrm{i}$ og orientering mod uret. Beregn det komplekse kurveintegral

$$\int_\gamma f(z)\, dz.$$

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Sidste gang fik vi repeteret fra kapitel 13 og gennemgået nyt om en række nye funktioner i kapitel 13.6. Læs/repeter dette og test dig selv *hjemme* med

Repetitionsopgaver til kap. 13.6: Lav 13.5.1+2+15 om eksponentialfunktionen e^z (nemme!).

Fortsæt med 13.6.6+7+3+4+13 om trigonometriske funktioner ($\cos z$, $\sin z$) og hyperbolske funktioner ($\cosh z$, $\sinh z$).

Desuden gennemgik vi kapitel 14.1+2 om komplekse kurveintegraler til og med Cauchys integralsætning.

13. gang, fredag den 2. november. Her regnes opgaver i emnerne:

Kurveintegraler: Lav opgave 14.1.21+23+25.

Find også en nem måde at angribe 14.1.26 på !

Kurveopdeling: Regn 14.1.33.

ML-uligheden: Repeter denne ved at regne 14.1.35.

Cauchys integralsætning: Gennemsku 14.2.2 (nem!).

Deformation af kurver: Udfør diskussionen i opgave 14.2.3.

Lav også 14.2.4.

Gl. eksamensopgave: (jan. 2012)

1. (10 point) Vis at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$ konvergerer for alle z i det komplekse plan $\mathbb{C}$.

Lad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$. Da potensrækken for konvergerer for alle $z \in \mathbb{C}$ er $f(z)$ analytisk i hele $\mathbb{C}$.

2. (10 point) Lad $C_3(0)$ betegne cirklen med radius 3 og centrum i $z_0 = 0$ og orienteret mod uret. Beregn

$$\int_{C_3(0)} \frac{f(z)}{z}\, dz.$$

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Som lovet efter forelæsning idag kommer der til jeres oplysning/inspiration et

Eksamenslignende opgavesæt.

Opgave 1. (25 point) Løs ved brug af Laplacetransformationen systemet af ligninger

$$y_1'(t) = 2y_2(t) + 1$$
$$y_2'(t) = -y_1(t) + t$$

under begyndelsesbetingelserne $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 2$.

Opgave 2. (25 point) Betragt vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ og fladen S givet ved parameterfremstillingen

$$\vec{r}(\rho, \phi) = (2 + \rho \cos \phi, 3, 1 + \rho \sin \phi),$$

hvor $0 \leq \rho \leq 1$ og $0 \leq \phi \leq 2\pi$.

(1) (5 point) Begrund at S er en cirkelskive i xz-planen, og find dens radius og centrum.

(2) (10 point) Beregn $\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$ og $\operatorname{rot} \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$.

(3) (10 point) Beregn flade integralet $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, hvor $\vec{n}$ betegner enhedsnormalvektoren til S.

Opgave 3 (25 point) Betragt ligningen $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t)$, hvor den ydre kraft $r(t)$ er en 2π-periodisk funktion givet ved

$$r(t) = \begin{cases} -\sin t, & \text{for } -\pi < t < 0 \\ \sin t, & \text{for } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Find en 2π-periodisk partikulærløsning.

Opgave 4. (25 point)

(1) (10 point) Lad $f(z) = \frac{z^2+1}{z^4+1}$. Find alle f's nulpunkter og poler.

(2) (15 point) Beregn integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + x^2}{1 + x^4}\, dx.$$

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Inden den sidste forelæsning fred d. 9/11 kan man med fordel repetere kapitel 15.1 om uendelige rækker hjemmefra. Især kvotient- og rodkriteriet for konvergens.

14. gang, fredag den 9. november. Her vil vi først gennemgå kapitel 15.2–4 og kapitel 16.1–3 samt fra 16.4 delafsnittet (uden overskrift) fra side 726 til 729 øverst. Alt sammen fra et praktisk synspunkt. Dvs. med hovedvægt på eksempler.

Dernæst ser vi på opgaver i

Konvergensradius: Bestem Taylorrækken for $g(z) = \frac{1}{1-z^2}$ i $z_0 = 0$ (nem!) og vis at dens konvergensradius er $R = 1$.

Regn også 15.2.10+9+7.

Taylorrækker: Find Taylorrækken for $f(z) = e^z + \frac{1}{1-z}$ med udviklingspunkt $z_0 = 0$.

Lav så 15.4.3 (nem) og 15.4.4.

Laurentrækker: Regn 16.1.5 og 16.1.6 samt 16.1.7. *Vink:* Brug Taylorrækkerne for de kendte funktioner.

Residuer: Lav 16.3.1.

Residueintegration: Regn først 16.3.7; eventuelt også 16.3.8.

Dernæst udregnes integralerne over $\mathbb{R}$ i opgave 16.4.5+6.

NB ! Jeg minder om, at I kan stille spørgsmål til pensum torsdag den 3. januar 2013; vi mødes i Fib. 16 lokale 1.108 kl.10–12.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Som lovet i dag ved den sidste forelæsning bringer jeg her en mindre samling af de resterende

Gl. eksamensopgaver:.

(januar 2011) 1. (25 point) Anvend Laplace transformationen til at løse ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t^2,$$

med begyndelsesbetingelsen $y(2) = 0$, $y'(2) = 1$.

(januar 2011) 2. (25 point) Betragt vektorfeltet $\vec{F}(x, y, z) = (0, -xz, y^2x)$. Lad σ være fladen med parameterfremstillingen

$$\vec{r}(u, v) = (u + v, u^2, v^2), \qquad u^2 + v^2 \leq 1,$$

og lad C betegne kurven givet ved

$$\vec{\gamma}(t) = (\cos t + \sin t, \cos^2 t, \sin^2 t), \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(i) Beregn $\int_\sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dA$, idet $\vec{n}$ betegner σ's normalvektor.

(ii) Beregn $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{\gamma}$. Hvorfor får man samme resultat ?

(januar 2011) 3. (25 point) Betragt ligningen

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = r(t),$$

hvor den ydre kraft $r(t)$ er den 2π-periodiske funktion der er defineret ved

$$r(t) = \begin{cases} t + \pi/2, & \text{for } -\pi < t < 0, \\ -t^2/\pi + \pi/2, & \text{for } 0 \leq t \leq \pi. \end{cases}$$

Vis at $r(t)$ hverken er lige eller ulige.

Find en 2π-periodisk partikulærløsning til ligningen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen