Oversigt nr. 1

Lærebøgerne for kurset er

[LNS]*Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, af I. Lankham, B. Nachtergaele og A. Schilling, Lecture notes for MAT67, University of California Davis, update January 2, 2016.

[AJ] *Matrix factorizations*, af Arne Jensen, Aalborg University, revised version August 2016.

Sidstnævnte kan tilgås som en PDF-fil på kursets moodle-side. [LNS] kan købes hos sekretær Lisbeth Grubbe Nielsen.

Uge	Dato	Seance	Emner (Opdateret pér 11/11)
36	9/9	1	kapitel 4: Vektorrum
			kapitel 5.1–2: Linearkombinationer og lineær (u)afhængighed.
37	14/9	2	kapitel 5.2–5.4: Basis og dimension. Koordinater.
	16/9	3	kapitel 6.1–6: Lineære afbildninger. Nulrum og billeder.
			Dimensionssætningen. Matricer for lineære afbildninger.
38	23/9	4	kapitel 6.7: Inverterbarhed.
			kapitel 7: Egenværdier og egenvektorer.
39	30/9	5	kapitel 9: Indre produkt rum.
40	7/10	6	kapitel 10: Basisskifte.
41			miniprojekt: Vektorrum af polynomier.
43	28/10	7	kapitel 10: Koordinatskifte.
			kapitel 8: Determinanter.
44	2/11	8	kapitel 11.1–3: Normale operatorer. Spektralsætningen.
44	3/11		1. selvstudium: QR-faktorisering.
45	9/11	9	kapitel 11.4: Ortogonal diagonalisering. Unitære matricer.
45	10/11		2. selvstudium: Kvadratrødder af matricer og operatorer.
45	11/11	10	kapitel 11.5–6: Positive operatorer. Polar dekomposition.
46	16/11	11	kapitel 11.7: Singulær værdi dekomposition af operatorer.
			afsnit 5 [AJ]: Singulær værdi dekomposition af matricer.
46	17/11		3. selvstudium: Fuld SVD og anvendelser af SVD.
46	18/11	12	afsnit 5+7: Mere om SVD og anvendelser.
47	23/11	13	afsnit 2: LU-faktorisering af matricer.
47	24/11		4. selvstudium: LU-faktorisering.
47	25/11	14	afsnit 3: Cholesky-faktorisering af matricer.

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- Sheldon Axler:*Linear algebra done right*, Springer 2001.
- Gilbert Strang: *Linear algebra and its applications*, Thomson Brooks/Cole, 2006.

I den første af disse er fremstillingen i sit udgangspunkt relativt tæt på tankegangen hos [LNS].

Hjemmeforberedelse til 1. gang. Læs først kapitel 1 i [LNS] som en optakt. Prøv også at finde de 8 basale regneregler for vektorer i $\mathbb{R}^n$ i din bog fra første studieår.

Forsøg dernæst at læse om *emnerne* i afsnittene 4.1–5.2 i [LNS]—sæt gerne en streg i margin ud for de ting du går i stå ved. (Nærlæsning færdiggøres efter forelæsningen).

Første gang, fredag den 9. september kl. 8.15–12. Først mødes vi til forelæsning kl. 8.15 i aud. B3-104. Her skal vi blandt andet diskutere organiseringen af kursusgangene, herunder placeringen af øvelserne.

Dernæst tager vi fat på stoffet, hvoraf jeg regner med at nå afsnittene 4.1–5.1 og et stykke ind i 5.2.

Regneøvelserne bliver:

Vektorrum: Bestem først $\vec{x} + \vec{y}$ og $(3 + \mathrm{i})\vec{x}$ når vektorerne er givet i $\mathbb{C}^3$ som

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1 + 2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 + \mathrm{i} \\ -4\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Fortsæt med opgave 4.1 (a)–(e).

Modsat vektor: Er det korrekt at $-(-\vec{v}) = \vec{v}$?

Nulreglen: Nulreglen udsiger at

$$a\vec{v} = \vec{0} \iff a = 0 \text{ eller } \vec{v} = \vec{0}.$$

Find først det eller de steder i [LNS], som giver den ene implikation.

Bevis dernæst den omvendte implikation. NB. Retfærdiggør hvert argument ved at henvise til axiomerne for vektorrum på side 37.

Underrum: Afgør om de følgende delmængder af $\mathbb{C}^3$ er underrum:

$$\{\, (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0 \,\}$$
$$\{\, (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 4 \,\}$$
$$\{\, (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 z_2 z_3 = 0 \,\}$$
$$\{\, (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 = 5z_3 \,\}$$

Sum af underrum: Antag at U er et underrum af V. Hvad er da definitionen af $U + U$? Er udsagnet $U + U = U$ sandt eller falsk ?

Hjemmeopfølgning. Nærlæs de gennemgåede afsnit 4.1–5.1+5.2 i detaljer—brug papir og blyant til at kontrollere udregningerne/levere de manglende udregninger !

Regn dernæst resten opgaverne ovenfor.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Vi nåede idag gennem kapitel 4 med et par små og et par store udeladelser. De store var beviserne for sætning 4.4.6 og 4.4.7. I bedes studere dem hjemmefra og melde tilbage ved næste kursusgang, om de volder jer problemer.

Desuden bør I nærlæse hele kapitel 4. Og dernæst forsøge at regne nedenstående opgaver til 2. kursusgang: Hvis I kan det, vil det være fint(!), og hvis ikke, så vil I være klar til at stille spørgsmål til dem straks fra *øvelsernes begyndelse* !

2. gang, onsdag den 14. september kl.8.15–12. Ved dagens forelæsninger vil vi stile mod at nå igennem kapitel 5 for at følge programmet. Vi vil gå kortfattet gennem afsnit 5.1, så repeter i forvejen begreber som linearkombination og spænd fra 1. studieår.

Dagens øvelser vedrører:

Vektorrum: Regn først opgave 4.1 (e)–(g).

Fortsæt med 4.2. (*Vink:* Hvad er den smarte indfaldsvinkel ?)

Underrum: Regn dem fra oversigt nr. 1, som du ikke nåede sidst.

Fortsæt med opgave 4.3 (a)–(e).

Modeksempel: Gennemsku opgave 4.4.

Direkte summer: Regn 4.5: Begynd først med at finde et underrum W sådan at summen $U+W$ er hele $\mathbb{F}[z]$. Undersøg dernæst om summen er direkte (hvor står der kriterier for dette ?).

Bevis-opgaver: Regn opgaverne 4.PW2–PW4.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Igår nåede vi til og med side 54 i [LNS].

3. gang, fredag den 16. september. Vi gør først kapitel 5 færdigt.

Dernæst stiler mod at gennemgå mest muligt af kapitel 6.1–6.6, som i nogen grad bør se velkendt ud. Men til forskel fra 1. år, hvor der blev lagt stor vægt på matricer, så vil vi nu fokusere på *lineære afbildninger* generelt, da de udgør det mere fundamentale begreb. Læg f.eks. mærke til at matricerne først kommer så sent som i afsnit 6.6.

Opgaverne tager vi emnerne:

Eksempel 3: Med $C(D,\mathbb{C})$ betegnes mængden af komplekse funktioner $f\colon D \to \mathbb{C}$, der er kontinuerte. (Igen er $D \subset \mathbb{R}$ et interval.) Vis at $C(D,\mathbb{C})$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$.

Lineær (u)afhængighed: Regn 5.1 og 5.4.

Basis: Se først på 5.1 igen, og godtgør at v_1, v_2,v_3 udgør en basis for $\mathbb{R}^3$. Angiv også v's koordinater mht. denne basis (nem!).

Regn dernæst 5.2.

Udtynding til basis: Vis at $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,-2)$ og $(1,0,1)$ udgør et frembringersæt for $\mathbb{R}^3$. Udtynd dernæst sættet til en basis for $\mathbb{R}^3$ ved at bruge metoden fra beviset for Udtyndingssætningen (5.3.4).

Bevis-opgaver: Regn 5.PW1 (intuitivt en oplagt sag). Husk at vise inklusioner begge veje.

Gå videre med 5.PW2.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Sidste gang nåede vi til og med afsnit 6.1. Bemærk dog, at I selv må læse og overveje de ting der står øverst på side 67.

Hjemmeforberedelse: Læs resten af kapitel 5 grundigt igennem, check detaljerne med papir og blyant. Regn dernæst følgende (uden at kigge i kapitel 5):

Sandt/falsk: Opgave 5.4 (a)–(e).

Læs dernæst kapitel 6.1 frem til side 67.

4. gang, fredag den 23. september. Først gennemgår vi resten af kapitel 6, dog lidt summarisk i afsnit 6.2–6.4, da det meste vil være tæt på et gensyn fra basis. (Repeter nulrum, billeddrum, injektiv og surjektiv.) Hovedvægten vil således ligge på matricer og invertibilitet.

Dernæst tager vi hul på kapitel 7 om egenværdier mm. (NB. Læs 7.2 først, og inddrag 7.1 når du når til "invariante underrum".) Vi når antageligt til og med afsnit 7.4 om eksistens af (komplekse!) egenværdier.

Ved øvelserne ser vi på følgende emner:

Eksempel 4: Med $F(M,\mathbb{C})$ betegnes mængden af afbildninger $f\colon M \to \mathbb{C}$, hvorved M er en vilkårlig mængde. Gør rede for at $F(M,\mathbb{C})$ er et vektorrum over $\mathbb{C}$ når vi indfører at

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m), \qquad (af)(m) = a \cdot f(m).$$

Genkender du rummet $F(M,\mathbb{C})$ i tilfældet hvor $M = \{1, 2, \dots, n\}$?

Genkender du også rummet, hvis $M = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, p\}$?

Endelig dimension: Udled at når V har endelig dimension, så har ethvert underrum $U \subset V$ også endelig dimension. (*Vink:* Suppler til større og større underrum $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ og brug hovedsætningen "$p \leq m$".)

Find også det sted i [LNS], hvor dette er benyttet !

Dimension: Regn opgave 5.3 (a)–(e).

Fortsæt med 5.5PW.

Grassmanns dimensionsformel: Regn 5.7PW ved at benytte formlen i sætning 5.4.6.

Linearitet: Udled at $T \circ S$ er lineær, når $S\colon U \to V$ og $T\colon V \to W$ begge er lineære afbildninger. Find stedet hvor dette står i [LNS] ! (*Brug lup !!*)

Regn så opgave 6.1 (nem).

Bevis-opgaver: Lav først 5.4PW (nem). Fortsæt med 5.2PW og 5.3PW.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi nåede idag at færdiggøre hele kapitel 6 i [LNS] om lineære afbildninger.

5. gang, fredag den 30. september. Vi begynder med at gennemgå kapitel 7 om egenværdier og -vektorer samt egenrum for lineære operatorer (endomorfier). Reperter disse begreber inden forelæsningen. Da afsnit 7.5 er noget tungt, bedes I også se nærmere på side 92 om øvre trekantsmatricer (hvad er det ?—hvorfor har de interesse ?).

Dernæst fortsætter vi i kapitel 9 med at se på indre produkter og normer. Antageligt når vi til omkring side 124.

Opgaverne tager vi indenfor emnerne:

Linearitet: Regn 6.2 (nem). Fortsæt med 6.1PW+6.5PW (man kan bruge en direkte sum). Desuden 6.2PW.

Inverterbarhed: Hvilken sætning i bogen tillader en at slutte, at T^{-1} eksisterer netop når matricen $M(T)^{-1}$ eksisterer ? Hvordan ser man dernæst at

$$M(T^{-1}) = M(T)^{-1} \quad ?$$

Lav så 6.9PW ved hjælp af en hovedsætning. Prøv dernæst 6.8PW.

Nulrum: Begynd med 6.3. Fortsæt med 6.7.

Dimensionssætningen: Gennemsku 6.5 og 6.6.

Matricer: Lad T være den operator på $\mathbb{C}^3$ der er givet ved

$$T(x, y, z) = (\mathrm{i}\, y, x + 2\,\mathrm{i}\, y + z, (1 + \mathrm{i})z).$$

Find så standard matricen for T.

Betragt så basen $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ for $\mathbb{C}^3$. Find da matricen $M(T)$ mht. denne basis.

Injektivitet: Regn 6.3PW.

Surjektivitet: Regn 6.5 og 6.4PW.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Idag fik vi gennemgået kapitel 7. Dog må I selv læse sætning 7.5.4 og dens bevis (sætningen blev kun omtalt), og ligeså med eksemplerne i afsnit 7.6.

På opfordring kommer her et løsningforslag til en bevisopgave. Dette er for at I kan se et eksempel på hvordan det kan gøres. Forslaget er, at I først stopper læsningen af disse linier og af egen drift prøver at regne 6.9PW.

Forslag. I opgave 6.9PW kan vi først antage, at $ST = I$; vi skal så vise, at der også gælder at $TS = I$. Fordi $ST = I$ er det klart at T er injektiv, for identiteten betyder at $S(Tv) = Iv = v$ for alle $v \in V$, så når $Tv_1 = Tv_2$ fås heraf at $v_1 = STv_1 = STv_2 = v_2$. Men så giver en hovedsætning (hvilken?) at T også er surjektiv (hvorfor?). Formlen $ST = I$ medfører at $T(ST) = TI = T$, hvoraf man ser at $(TS)Tv = Tv$ for alle $v \in V$, og da Tv kan gennemløbe hele V pga. surjektiviteten, så viser dette operatoridentiteten $TS = I$.

Den omvendte implikation $TS = I \implies ST = I$ ses analogt. Prøv det !

6. gang, fredag den 7. oktober 2016. Stoffet til dagens forelæsning bliver først fremmest kapitel 9 om vektorrum med *indre produkt* og *norm*. Dette er meget geometrisk, og bør derfor være lettere tilgængeligt, så vi kan måske nå de centrale ting i kapitel 10 også. Opgaverne til øvelserne:

Egenværdier: Regn først et par stykker af 7.4; lav resten hjemme.

Egenvektorer: Regn 7.5.

Egeninformation: Lav 7.1 som den står, men bestem de tilhørende *egenrum* også. Giv så 7.2 samme behandling !

Inverterbarhed: Brug en sætning i [LNS] til 7.8PW. Lav så 7.9PW (nem).

Invariante underrum: Regn 7.6.

Diagonalisering: Fibonacci-tallene a_n er $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ (kendt f.eks. fra "da Vinci mysteriet" af Dan Browne). Indse først, at talfølgen (a_n) kan fås ved gentagen anvendelse af T fra opgave 7.7 på $(1, 1)$.

Regn dernæst opgave 7.7 ved at benytte definitioner og sætninger fra [LNS]. Tillægsspørgsmål: Er T *diagonaliserbar* ?

Følg op med at vise at Fibonacci-tallene—højst overraskende—opfylder at

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Vink: Analyser $T^n(1, 1)$ via koordinaterne $c_\pm = \frac{\pm\lambda_\pm}{\sqrt{5}}$ for $v = (1, 1)$ mht. basen i (c); udnyt at $\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right| < 1$ til at vise at $\lambda_+^{-n} T^n(1, 1) \to \frac{1}{\sqrt{5}}(1, \lambda_+)$.

"Det gyldne snit" λ_+ har været kendt siden oldtiden: Det er forholdet mellem de to kanter x og y i et rektangel, som er naturligt i den forstand at $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}$; dvs. at mindste kant, x, forholder sig til den største, som denne forholder sig til summen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Den 6. gang nåede vi til og med afsnit 9.5, idet dog korollarerne side 131 blev overladt til jer selv at læse (både indhold og beviser skulle gerne være ukomplicerede at forstå).

Desuden blev afsnit 9.6 gennemgået under miniprojektet den 12. oktober kl.11.

7. gang, fredag den 28. oktober. Vi fortsætter gennemgangen af [LNS] med kapitel 10 om koordinatskifte og kapitel 8 om determinanter. I kapitel 10 vil vi dog lægge hovedfokus på determinanternes egenskaber (snarere end på beviser).

Opgaver meddeles senere (indsat 29. november):

Gram–Schmidt: Regn 9.1 og 9.2 (brug Eulers formler).

Ortonormale baser: Lav 9.6.

Ortogonal projektion: Lav 9.5.

Cauchy–Schwarz's ulighed: Gennemsku 9.2PW.

Ortogonal komplement: Vis først noternes påstand om at $U_1 \subset U_2$ medfører $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

Lav dernæst 9.6PW.

Indre produkt: Udled polariseringsidentiteterne in opgave 9.4PW og 9.5PW.

Norm: Regn 9.3PW. NB. Vis først at udtrykket faktisk giver en norm på $\mathbb{R}^2$. (Denne er af oplagte grunde kendt som Manhattan-normen !)

Bevisopgave: Skriv dit eget bevis for Theorem 9.6.4: Lav en forsimpling af den del af beviset der står øverst side 134.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Sidste gang fik vi gennemgået almene formler for skift af baser i vektorrum og de tilhørende formler for vektorers koordinatskifte og lineære operatorers matrixskifte.

I kort form fandt vi ved overgang fra en basis $e = (e_1, \dots, e_n)$ til en ny basis $f = (f_1, \dots, f_n)$ for V, at der er en inverterbar basisskifte-matrix S givet ved

$$(e_1 e_2 \dots e_n) = (f_1 f_2 \dots f_n) S. \tag{1}$$

Denne matrix S virker så også som *koordinatskiftematrix* og ved *matrixskifte*, idet

$$[v]_f = S[v]_e \quad \text{for alle } v \in V, \tag{2}$$
$$[T]_f = S[T]_e S^{-1} \quad \text{for alle } T \in \mathbb{L}(V). \tag{3}$$

Desuden så vi på de beregningsmæssige forenklinger, som der er for $[v]_e$ og $[T]_e$, når basen $e = (e_1, \dots, e_n)$ er ortonormal. Jvf. kapitel 10 i [LNS].

Dernæst gennemgik vi den oprindelige definition af determinanter ved hjælp af permutationer i Definition 8.2.1. Defineret således, kan determinanten udregnes ved at udvikle efter en vilkårlig række, eller en vilkårlig søjle, som beskrevet i Theorem 8.2.8 (og derfor giver alle disse udviklinger samme tal).

8. gang, onsdag den 2. november. Her vil vi påbegynde kapitel 11 i [LNS] om *spektralsætningen*. Denne store hovedsætning udsiger, at en operator $T \in \mathbb{L}(V)$ er *ortogonalt* diagonaliserbar hvis og kun hvis T er normal (dvs. $T^*T = TT^*$).

Vi når antageligt til og med afsnit 11.3.

Opgaver regnes i emnerne:

Koordinatskifte: Begynd med 10.1. (*Vink:* Man kan bruge formlen (1) direkte, eller den kan udnyttes til at bestemme S som en invers matrix her.)

Find matricen A for operatoren D givet ved differentiation i $V = \mathbb{C}_2[z]$, idet $A = [D]_e$ og $e = (1, z, z^2)$ betegner den naturlige basis for $\mathbb{C}_2[z]$. Find så matricen S, som skifter koordinater til basen $f = (z^2, (z-1)^2, (z-2)^2)$ for $\mathbb{C}_2[z]$. Bestem endelig matricen $B = [D]_f$ (direkte eller via (3)).

Ortogonal projektion: Regn først 9.3 (*vink:* Se Example 9.6.7). Fortsæt med 9.4 og 9.5.

Determinanter Regn først 8.1 ved at benytte den 'nye' definition i (a); prøv at skrive permutationerne op undervejs. Dernæst en regneregel i (b).

Regn så 9.2. Overvej dernæst hvad 9.3 indebærer !

Lav 9.4 ved at bruge reglen i 9.2. Snup så også 9.5 og 9.6.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

1. selvstudium, 3. november. Temaet bliver den såkaldte QR-faktorisering, som er beskrevet i afsnit 4 af Arne Jensens notesæt [AJ] (tilgængeligt på moodle). Kort fortalt kan enhver $m \times n$-matrix A skrives på formen $A = QR$, hvor $Q_{m,n}$ har ortonormale søjer mens R er en øvre trekantsmatrix.

På den ene side er dette nyttigt for eksempel ved anvendelse af mindste kvadraters metode i lineær regression på konkrete datasæt—i statistik, fysik, mm. kan disse datasæt have så mange par (x_i, y_i) at manuel indtastning nødvendigvis må erstattes af et computerprogram (som man selv skal skrive…). Se mere om dette i afsnit 6 i [AJ].

På den anden side kan Q og R nemt beregnes vha. Gram–Schmidts metode: Q's søjler er de ortonormale vektorer som Gram–Schmidt metoden producerer ud fra A's søjler, og R indeholder såmænd blot de indre produkter, der udregnes undervejs i Gram–Schmidt proceduren !

Opgaverne I skal lave er følgende:

(1) Slå op i afsnit 4 i [AJ] og indfør vores sædvanlige notation $\langle v, q \rangle$ for de indre produkter i teksten (skriv den af med brug af $\langle v, q \rangle$)—og lær undervejs hvordan/hvorfor Q og R kan opnås vha. Gram–Schmidt metoden, som beskrevet ovenfor.

Angående Theorem 4.1, en matrix M kaldes ortogonal hvis $M^T = M^{-1}$, hhv. unitær hvis $M^* = M^{-1}$.

(2) Regn opgave 4.1.1 (og 4.2.2 hvis I har god tid).

(3) Lav opgave 4.1.1PW (nem).

(4) Lær om anvendelsen af QR-faktorisering ved at læse i afsnit 6 af [AJ], både om det generelle mindste kvadraters problem på side 27–28 (pånær de sidste 3 linier), og om den specifikke anvendelse af QR-faktoriseringen på side 29, linie 9–16.

Bemærk, at ligningssystemet (6.4) for (α, β) er *overbestemt*, dvs. at der er for mange ligninger, til at de alle kan være opfyldt. Strategien er så at vælge (α, β) sådan at venstre og højre side afviger mindst muligt fra hinanden (målt via normen af differencen)—her er Q og R nyttige !

I (4) vil I møde udsagnet at $P = QQ^*$. Dette er en konsekvens af den generelle matrixformel for ortogonalprojektionen på A's søjlerum: $P = A(A^*A)^{-1}A^*$. (Den findes f.eks. side 37 i Bo Rosbjergs kompendium.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

I onsdags fik vi formuleret og bevist Spektralsætningen (Theorem 11.3.1). Den udsiger at $T \in \mathcal{L}(V)$ er normal (dvs. $T^*T = TT^*$), netop når T er *ortogonalt* diagonaliserbar (dvs. at V har en *ortonormal* basis af egenvektorer for T).

Dog ender beviset for Theorem 11.3.1 noget brat i [LNS]. Som sagt, så følger $T^*T = TT^*$ af at matrixtilordningen $T \mapsto M(T)$ er injektiv som afbildning $\mathcal{L}(V) \to \mathbb{C}^{n\times n}$, hvilket, da den er lineær, følger hvis $M(T) = 0_{n,n} \implies T = 0$ (som ses let).

Bemærk i øvrigt, at punkt (6) i Proposition 11.1.3 er noget upræcist formuleret som $M(T^*) = M(T)^*$.

Dette er kun rigtigt, når matricerne beregnes med hensyn til en *ortonormal* basis. Mere præcist, for enhver ortonormal basis $e = (e_1, \dots, e_n)$ for V, så gælder for alle operatorer $T \in \mathcal{L}(V)$ at

$$[T^*]_e = [T]_e^* \qquad (= (\overline{a_{j,i}})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n})$$

9. gang, onsdag den 9. november. Her gennemgår vi resten af 11.3 og 11.4 inklusive eksemplerne. Opgaverne tages i emnerne:

Adjungeret operator: Bevis (1)–(6) i Proposition 11.1.3 vha. Definition 11.1.1; jvf. ovenstående om (6).

Ortogonal komplement: Vis at man i $V = \operatorname{ran}(T) \oplus \operatorname{ran}(T)^\perp$ har at

$$\operatorname{null}(T^*) = \operatorname{ran}(T)^\perp.$$

Vink: Brug definitionen af T^* til at opnå begge inklusioner.

Modeksempel: Bestem $M(T)$ mht. den naturlige basis, når T betegner den lineære operator på $\mathbb{R}^2$, som foretager en rotation med vinklen θ mod uret.

Forklar så at Proposition 11.2.2 *ikke* er gyldig for vektorrum over $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.

Selvadjungerede operatorer: Hvilke af følgende matricer er selvadjungerede ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7-\mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 5 \\ 7 & 5 & 5+7\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & 3+4\mathrm{i} & 5-6\mathrm{i} \\ -3-4\mathrm{i} & 7 & 8-9\mathrm{i} \\ 6\mathrm{i}+5 & 9\mathrm{i}+8 & -1 \end{pmatrix}$$

Analyser om enhver $T \in \mathcal{L}(V)$ opfylder $T = R + \mathrm{i}\,S$ for $R = R^*$, $S = S^*$.

Normale operatorer: Hvilke af følgende matricer er normale ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & \mathrm{i} & -5 \\ -7 & 5 & 7\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3+4\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 7 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ortogonal diagonalisering: Hvilke af de ovenstående matricer er ortogonalt diagonaliserbare ?

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

2. selvstudium, den 10. november: Kvadratrødder af Positive Operatorer.

Temaet er at I skal lære at "tage kvadratroden" af en positiv operator, og at spektralsætningen er et *meget* bekvemt hjælpemiddel hertil. I kan læse i afsnit 11.5 som forberedelse, om I vil.

Allerførst: Når T er en lineær operator (dvs. endomorfi) på et indre produkt rum V af dimension $n \in \mathbb{N}$, så siges $S \in \mathcal{L}(V)$ at være en *kvadratrod* af T dersom

$$S^*S = T. \tag{4}$$

I så fald tillader (!) man sig at skrive, at $S = \sqrt{T}$.

I det simple tilfælde at $V = \mathbb{R}$ ved vi jo godt at $\sqrt{t}$ kun er defineret for $t \geq 0$. Derfor må vi også forvente at få brug for et positivitetsbegreb for operatoren T:

Definition 11.5.1. *En operator $T \in \mathcal{L}(V)$ kaldes* positiv *dersom $T^* = T$ og*

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \qquad \textit{for alle } v \in V. \tag{5}$$

I så fald skrives $T \geq 0$.

Dagens opgaver er følgende (opdateret 10. november):

(1) Lav først en analyse: Vis at hvis T har en kvadratrod S, som defineret i (4), så gælder nødvendigvis at T er både selv-adjungeret og postiv, dvs. $T^* = T$ og at $T \geq 0$; jvf. (5).

(2) Og så til syntesen: Når $V = \mathbb{C}^n$ og $Tv = Av$, hvor $A_{n,n}$ betegner T's matrix mht. den naturlige basis, så søger vi $S_{n,n}$ sådan at $S^*S = A$.

Begynd med tilfældet $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$ er en diagonalmatrix. Hvad skal der gælde om $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for at $D^* = D$ og $D \geq 0$? Kan du for sådanne D bestemme B sådan at $B^*B = D$?

Vis nu for almene A opfyldende $A^* = A$ og $A \geq 0$ at der eksisterer en kvadratrod af A, dvs. S opfyldende $S^*S = A$. (*Vink:* Faktoriser A.)

(3) Gå nu til det almene tilfælde: Når $T^* = T \geq 0$ på V og $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, så findes en operator S på V sådan at $S^*S = T$. (*Vink:* Brug spektralsætningen.)

(4) Post festum-analysen: Udled at når $S = \sqrt{T}$, så gælder endda at $SS = T$. (*Vink:* At $S^* = S$ følger af at $M(S^*) = M(S)$.) Vis at $S \geq 0$ kan opnås.

(5) Nedvarmning: Verificer at man for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan nøjes med at skrive selve uligheden i Definition 11.5.1: Det følger da at $T^* = T$ (vha. polarisering).

Læs mere om positive operatorer og kvadratrødder i afsnit 11.5 i [LNS].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Forslag til besvarelse. På oversigt nr. 10 skulle man afklare om enhver operator T på et komplekst indre produkt rum V kan skrives på formen $T = R + \mathrm{i}\, S$ for passende valgte selv-adjungerede operatorer R og S på V.

Nu medfører formlen at $T^* = (R + \mathrm{i}\, S)^* = R^* + \bar{\mathrm{i}} S^* = R - \mathrm{i}\, S$ pga. reglerne for adjungering. Ved addition ses så at $T + T^* = 2R$, mens subtraktion giver $T - T^* = 2\,\mathrm{i}\, S$. Eneste mulighed er altså $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ og $S = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)$.

Efter denne analyse, så kan vi lave en syntese: Indfører vi R og S i $\mathcal{L}(V)$ ved formlerne ovenfor, så er det oplagt $T = R + \mathrm{i}\, S$, og da regnereglerne for adjungering giver $R^* = R$ hhv. $S^* = S$ (verificer!), så har disse valg af R og S de ønskede egenskaber. (NB. I analogi med komplekse tal bruger man også notationen $T_{\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}(T + T^*)$ og $T_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2\mathrm{i}}(T - T^*)$.)

Sidste gang gennemgik vi afsnit 11.4 om spektralsætningens konsekvenser i forbindelse med diagonalisering af matricer. Udgangspunktet var dog en opsummering af det tidligere kendte, nemlig at T er diagonaliserbar (dvs. $M(T)$ er en diagonalmatrix mht. en passende valgt basis for V; jvf. side 153 under midten) netop når V har en basis bestående af egenvektorer for T (Proposition 11.4.1), som på sin side er ækvivalent med at enhver matrix for T er similær med en diagonalmatrix, $S[T]_f S^{-1} = D$ (Proposition 11.4.2).

Hovedpointen var dog, at når T er normal, så kan vi i formlen $S[T]_f S^{-1}$ vælge søjlerne af S^{-1} som et ortonormalt sæt i $\mathbb{C}^n$ (pga. spektralsætningen), hvorved matricen $U = S^{-1}$ bliver *unitær*—det vil sige at $U^* = U^{-1}$ (jvf. også (11.2)). Dette er en stor fordel i både teori og praksis. Jvf. Example 11.4.4.

Vi gik derfor videre til at studere unitære matricer. Desværre er [LNS] ikke redelig på dette punkt, da unitære matricer ikke skelnes fra unitære *operatorer*—f.eks. har formlen lige over (11.1) ikke mening af denne grund. Og de 2 linier efter (11.2) er vist egentlig blot en gentagelse af definitionen midt på side 154…

Jeg håber derfor snarest at vende tilbage med en bedre præsentation.

10. gang, fredag den 11. november. Vi gør her læsningen af [LNS] færdig: I dagens selvstudium skulle I arbejde med emnerne fra 11.5, og i morgen gennemgår vi afsnit 11.6+7 som når frem til det generelle resultat, at *enhver* operator $T \in \mathcal{L}(V)$ for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ har en diagonalmatrix, blot mht. TO ortonormale baser—dette kræver såkaldte *singulære* værdier i stedet for egenværdier, som I skal se.

Opgaverne bliver denne gang:

Positive operatorer: Lav 11.5PW (nem). Fortsæt med at verificere påstanden efter definition 11.5.1 (dvs. lav opgaven (5) i selvstudium nr. 2).

Matrix-faktorisering: Regn 11.1 ved at bruge formlen for matrixskifte, jvf. (3) på oversigt nr. 8. (Og vær på vagt overfor unitære matricer !)

Fortsæt med matricerne i 11.2.

Unitære matricer: Vis at at $\det(U)\overline{\det(U)} = 1$ når $U_{n,n}$ er unitær (nem), sådan at $\det U = e^{\mathrm{i}\,\theta}$ for et $\theta \in \mathbb{R}$, og specielt at $\det O = \pm 1$, hvis O er ortogonal.

Gennemsku at ligningerne $U^*U = I = UU^*$ for unitaritet, se (11.2), er ensbetydende med at søjlerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$—og med at rækkerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$.

Selvadjungerede operatorer: Lav 11.1PW (nem) og 11.6. Fortsæt med 11.4PW.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Det følgende erstatter fremstillingen side 154-155 i [LNS] angående:

Unitære operatorer og matricer.

For en *operator* $S\colon V \to V$ er det en definition at S er unitær, dersom

$$S^*S = I = SS^*. \tag{6}$$

Hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ siges i så fald at S er ortogonal.

Nyttigheden af dette begreb ligger til dels i, at unitære/ortogonale operatorer er nemme at få øje på:

Sætning 1. *De følgende egenskaber er ækvivalente for $S \in \mathcal{L}(V)$:*

(i) $SS^* = I$*;*

(ii) $S^*S = I$*;*

(iii) $(Se_1, \dots, Se_n)$ *er et ortonormalt sæt i* V*, når* $(e_1, \dots, e_n)$ *er ortonormalt;*

(iv) V *har en o.n.b.* $(e_1, \dots, e_n)$ *sådan at* $(Se_1, \dots, Se_n)$ *er et ortonormalt sæt;*

(v) S *er en isometri:* $\|Sv\| = \|v\|$ *for alle* $v \in V$*;*

(vi) $\langle Sv, Sw\rangle = \langle v, w\rangle$ *for alle* $v, w \in V$*.*

I bekræftende fald er S inverterbar med $S^* = S^{-1}$.

Bemærkning: For at verificere at en given operator S er unitær, så er det altså nok at eftervise den ene af de to ligninger i definitionen (6), thi (i) $\iff$ (ii). Som konsekvens ses at S er unitær ((ii) gælder) netop når S^* er unitær ((i) gælder).

Bevis: Af (i) sluttes at S er surjektiv, fordi $v = SS^*v$ for ethvert $v \in V$. Men så er S også injektiv iflg. Hovedsætning 6.7.7, så S^{-1} eksisterer. Men da S^* er højreinvers til S pga. (i), så er $S^* = S^{-1}$, hvilket viser både sidste påstand og (ii).

At omvendt (ii) $\implies$ (i) vises analogt, idet $S^*S = I$ giver at S er injektiv.

Af (ii) ses at $\langle Se_i, Se_j\rangle = \langle e_i, S^*Se_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$, når $(e_1, \dots, e_n)$ er et givet ortonormalt sæt. Heraf (iii).

Det er klart at (iii) medfører (iv), da V har en ortonormal basis ($\dim V < \infty$).

Ang. (iv) $\implies$ (v): Vi har $Sv = \langle v, e_1\rangle Se_1 + \dots + \langle v, e_n\rangle Se_n$ pga. egenskaberne ved o.n.b. Men da også $(Se_1, \dots, Se_n)$ er en o.n.b., pga. (iv), så fås heraf at

$$\|Sv\|^2 = |\langle v, e_1\rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n\rangle|^2 = \|v\|^2.$$

Uddragning af kvadratroden viser så at S er en isometri, dvs. (v).

Ang. (v) $\implies$ (vi): Polariseringsidentiteten (opgave 9.5PW) og (v) giver

$$\begin{aligned}
4\langle Sv, Sw\rangle &= \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|Sv + \mathrm{i}^k\, Sw\|^2 \\
&= \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|S(v + \mathrm{i}^k\, w)\|^2 = \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, \|v + \mathrm{i}^k\, w\|^2 = 4\langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Tilsvarende vises (v) $\Longrightarrow$ (vi) for $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (jvf. opgave 9.4PW).

Endelig giver (vi) at $\langle (S^*S - I)v, w\rangle = \langle Sv, Sw\rangle - \langle v, w\rangle = 0$ for alle $v, w \in V$. Men for $w = (S^*S - I)v$ ses at $(S^*S - I)v = 0$, og heraf fås (ii). ■

En *matrix* $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siges analogt at være unitær hvis

$$U^*U = E = UU^*,$$

hvorved E betegner enhedsmatricen af n'te orden. Dog kaldes $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonal hvis $U^TU = UU^T = E$, men det er samme krav som ovenstående, fordi $U^* = U^T$ når U er reel.

På den ene side er situationen enkel nok: Indføres $S\colon \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ ved $S(v) = Uv$, så er $M(S) = U$ mht. den naturlige basis. Derfor fås

$$S^*S = I \iff M(S^*S) = M(I) \iff M(S)^*M(S) = E \iff U^*U = E.$$

Altså er U unitær netop når den inducerede operator S er unitær på $\mathbb{F}^n$. Alle egenskaberne i sætningen ovenfor kan derfor (bekvemt) læses med U i stedet for S.

På den anden side er der yderligere muligheder for at teste om en *matrix* er unitær.

Sætning 2. *For $U \in \mathbb{F}^{n\times n}$ gælder at*

$$\text{(I)} \Longrightarrow \text{(II)} \iff \text{(III)} \iff \text{(IV)} \Longrightarrow \text{(V)}$$

blandt egenskaberne:

(I) U er koordinatskiftematrix mellem to ortonormale baser $e = (e_1, \dots, e_n)$ og $f = (f_1, \dots, f_n)$ i et indre produkt rum V;

(II) Søjlerne i U udgør en o.n.b. i $\mathbb{F}^n$;

(III) U er unitær;

(IV) Rækkerne i U udgør en o.n.b. i $\mathbb{F}^n$;

(V) Når U er koordinatskiftematrix mellem to baser e og f i et indre produkt rum V, så er enten ingen af baserne eller både e og f ortonormale.

Bevis. Her ses det direkte at (II) $\iff$ (III) og at (III) $\iff$ (IV).

Ang. (I) $\Longrightarrow$ (II): Når $[v]_f = U[v]_e$, så er $(e_1 \dots e_n) = (f_1 \dots f_n)U$, hvilket betyder at $e_i = u_{1i}f_1 + \dots + u_{ni}f_n$ for $i \in \{1, \dots, n\}$. Da e og f er o.n.b. fås

$$\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{k,i}\overline{u_{l,j}}\langle f_k, f_l\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} u_{k,i}\overline{u_{l,j}}\delta_{k,l} = u_{1,i}\overline{u_{1,j}} + \dots + u_{n,i}\overline{u_{n,j}}. \tag{7}$$

Her er højresiden lig det indre produkt af i'te og j'te søjle i U, mens venstresiden er $\delta_{i,j}$ når e er en o.n.b. Dette viser at (II) gælder.

Givet at U er unitær, og at f er en o.n.b. i (V), så gentages udregningen i (7), hvor det nu er højresiden der er $\delta_{i,j}$: Altså er også e en o.n.b. Hvis vi derimod har at e er en o.n.b. på V, så udnyttes at også U^* er unitær: Som invers til U har vi $[v]_e = U^*[v]_f$, så af det foregående argument anvendt på U^* sluttes at også f er en o.n.b. Dette viser at (III) $\Longrightarrow$ (V). ■

Bemærkning. Da (II) $\Longrightarrow$ (III), så viser argumentet i (7) at koordinatskiftematricen U i (I) er unitær. NB: Dette erstatter midten af side 154 i [LNS].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Idag fik vi gennemgået 11.5–6 om *positive* operatorer, deres *kvadratrødder* $\sqrt{T}$ (i mange detaljer) og *polar dekomponering* af almene operatorer på indre produkt rum, $T = U|T|$.

Theorem 11.6.1 burde oplyse eksplicit, at der i $T = U|T|$ gælder at U er en unitær *operator* (intet er nævnt), mens T's modulus er givet ved $|T| = \sqrt{T^*T}$. Vi fik gennemgået alle detaljer, pånær den sidste anvendelse af Pythagoras, som giver at U faktisk er en unitær operator; dette må I selv læse (ej svært).

Men for at være tydelig på dette punkt må I referere til oversigt nr. 13, hvor jeg har gennemgået begrebet unitær operator. Se især punkt (v) i Sætning 1. Desuden er begrebet unitær matrix gennemgået, dels til sammenligning, dels fordi dette er *ekstremt* nyttigt i forbindelse med ortogonal diagonalisering af konkrete matricer.

NB. Oversigt nr. 13 er blevet opdateret siden den blev udleveret under dagens forelæsning.

11. gang, onsdag den 16. november. Vi begynder med at gennemgå SVD i kapitel 11.7 af [LNS]. Dernæst fortsætter vi med SVD i afsnit 5 af [AJ]. Groft sagt giver SVD svaret på spørgsmålet: Hvad gør man når A ikke er diagonaliserbar ?

Opgaverne vedrører:

Unitær: Vis at når $S\colon V \to V$ er en unitær operator, så er $U = [S]_e$ en unitær matrix (nem) hvis e er en o.n.b. Vis at for enhver egenværdi λ for U gælder $|\lambda| = 1$.

Godtgør at (II) $\iff$ (III) $\iff$ (IV), jvf. oversigt nr. 13.

Positive operatorer: Undersøg om matricerne $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ giver positive operatorer på $\mathbb{C}^2$.

Kvadratrødder: Find kvadratroden $S = \sqrt{A}$ af matricen A i opgave 11.2 (c). Bemærk at S skal have formen $U \operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{8})U^*$ for at være *positiv*.

Facit: $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} 5 & 1 + \mathrm{i} \\ 1 - \mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$.

Diagonalisering: Lav 11.3 stk. (b)–(f). Evt. også (a) via computer.

Fortsæt med opgave 2 fra marts 2016.

Polar dekomponering: Regn 11.5.

*Betragt operatoren D givet ved differentiation på $\mathbb{C}_2[z]$ med $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(z)\bar{q}(z)\, dz$. Bestem modulus $|D|$. *Vink:* En ortonormal basis er $e_1 = 1, e_2 = \sqrt{3}(2z-1)$ og $e_3 = \sqrt{5}(6z^2 - 6z + 1)$, som vi så i miniprojektet. (NB. Eksemplet ved forelæsningen var forkert, fordi $(1, z, z^2)$ ikke er en ortonormal basis. ØV.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

3. selvstudium, den 17. november: Reduceret og fuld SVD af matricer.

I dagens selvstudium skal I stifte nærmere bekendtskab med den reducerede SVD: $A = X\Sigma Y^*$, som vi nåede frem til (uden bevis) ved dagens forelæsning. Ved at bruge de detaljerede oplysninger i Theorem 5.11 i [AJ] bør I kunne bestemme X, Y og Σ for konkrete matricer A.

Desuden er der den fulde SVD: $A = X_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}^*$, som er beskrevet i afsnit 5.4. Dette afsnit må I orientere jer i på egen hånd. Groft sagt skal man (modsat den reducerede SVD) undlade at ignorere visse vektorer i de ortonomale baser—det giver så flere indgange i matricerne, især en masse nuller i Σ_{f}.

Man kan nok godt have brug for en fremgangsmåde. Den kunne begynde sådan her:

(i) Beregn A^*A (eller AA^*) og find egenværdierne med $\lambda_j > 0$; aflæs dernæst $r = \operatorname{rang} A$ som antallet af disse egenværdier.

(ii) Bestem o.n.b. for V bestående af egenvektorer $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ sådan at $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \dots = 0$. Indsæt i $Y = [v_1 \dots v_r]$; hhv. i $Y_{\mathrm{f}} = [v_1 \dots v_r \dots v_n]$.

(iii) Opskriv $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $\lambda_j > 0$ og sæt ind i diagonalmatricen $\Sigma_{r,r}$; suppler med 0-blokke til $\Sigma_{\mathrm{f}} \in \mathbb{C}^{m\times n}$.

(iv) Udregn $w_j = \frac{1}{\sigma_j}Av_j$ for $j \in \{1, \dots, r\}$ og indsæt i $X = [w_1 \dots w_r]$; suppler med o.n.b. for $\operatorname{null}(A^*)$ til X_{f}.

(v) Opskriv faktoriseringen $A = X\Sigma Y^*$, hhv. $A = X_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}^*$.

(Udfyldt torsdag eftermiddag.)

Dagens opgaver. Mit forslag er at I regner følgende:

(1) Prøv først at bruge Theorem 5.11 og 5.13 til at regne detaljerne efter i Example 5.14. Altså: Hvor kommer matricerne fra i disse faktoriseringer ?

(2) Regn opgave 5.1 og fuldend “opskriften” ovenfor med flere skridt.

(3) Fortsæt med opgave 5.2.

(4) Mindste kvadraters metode: Læs om hvordan SVD kan bruges her på side 28–29.

Det ene facit i opgave 5.1 er **TUNGT**, nemlig

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix}.$$

Bemærk at de to yderste er unitære, da de har ortonormale søjler hhv. rækker. Desuden er $X = Y$ fordi $A^*A = AA^*$ her.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 16

NB. På de to foregående sider er der opdateringer fsv. angår facitter til visse opgaver.

12. gang, fredag den 18. november. Vi gør her afsnit 5 i [AJ] færdigt. Desuden stiler jeg mod at gennemgå det vigtigste af afsnit 7 og 8, nemlig Eckart-Youngs sætning og eksemplerne om billedkompression.

Opgaverne:

Unitær: Vis at når matricen $U_{n,n} = [u_1 u_2 \dots u_n]$ er unitær, så gælder det samme om $\tilde{U} = [e^{\mathrm{i}\theta} u_1 u_2 \dots u_n]$. Er der et tilsvarende resultat for en ortogonal matrix $O = [o_1 \dots o_n]$?

Singulære værdier: Udled at der for en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ med singulære værdier $s_1, s_2, \dots, s_n$ gælder for alle $v \in V$ at

$$(\min_j s_j)\|v\| \leq \|Tv\| \leq (\max_j s_j)\|v\|.$$

Find de singulære værdier for matricen $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

SVD: Find både den reducerede og den fulde SVD for ovenstående matrix B. (NB. Pæne tal!)

Regn opgave 5.2, hvis du ikke nåede den i 3. selvstudium.

4 fundamentale underrum: Beregn de 4 matricer nævnt side 25–26 for den i opgave 5.2 givne matrix.

Regn 5.1PW. Godtgør dernæst påstanden om de 4 ortogonale projektioner ved side 25–26.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 17

Facit:. I opgaven med at udføre SVD på matricen B på oversigt nr. 16 finder man følgende reducerede SVD:

$$B = X\Sigma Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Her kan de første to søjler af X ombyttes, hvis man også ombytter de to første søjler af Y. (Ellers kan man ikke opretholde at $w_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j$.)

13. gang, onsdag den 23. november. Her gennemgår vi afsnit 2 i [AJ] om LU-faktorisering, som fås ret direkte ved hjælp af elementarmatricer. Repeter venligst disse fra basisåret.

Desuden vil jeg prøve at nå (det meste af) afsnit 3 om Cholesky faktorisering, således at vi kan gennemgå nogle eksempler ved forelæsningen fredag den 25.

Opgaver:

SVD: Begynd med at finde den matricen A for differentiationsoperatoren D på $\mathbb{C}_2[z]$ mht. basen $(1, z, z^2)$. Find så både den reducerede og den fulde SVD for A. Facit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Regn dernæst opgave 4 i eksamenssættet fra januar 2016.

Mindste kvadraters metode: Regn 6.1PW (bliv inspireret af (6.4)). Ville man kunne angribe normalligningen med QR eller SVD ?

LU-faktorisering: Regn opgave 2.1 i [AJ].

14. gang, fredag den 25. november. Her gennemgås resten af afsnit 3 i [AJ] og nogle eksempler på de gennemgåede matrix faktoriseringer.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 18

Pensum. Pensum udgøres af de læste dele af de to notesæt: Afsnit 1–6 i [AJ] og kapitel 4–11 i [LNS].

Dog er afsnit 8.1 om permutationer i [LNS] kursorisk (dvs. at man skal kende begreber og resultater derfra, men bliver ikke prøvet i betragtningerne (=beviserne) i afsnittet).

Spørgetime. Mandag den 2. januar 2017 klokken 10.15–12.00. Lokale: NJV14 4-107.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 19

4. selvstudium: LU-faktorisering og Cholesky-faktorisering.
Disse emner er blevet (ufuldstændigt) belyst ved den 13. kursusgang. Derfor består dagens program i at lære emnerne nærmere at kende via opgaverne:

LU-faktorisering: Færdiggør opgave 2.1 i [AJ].

Mere LU-faktorisering: Fortsæt med opgave 2.2.

Regn også 2.4 for at se hvordan rækkeombytninger fører til LU-faktorisering af den permuterede matrix PA; jvf. midten af side 8.

Positivt definit: Regn opgave 3.1 ved at bruge sætning 3.7.

Lav så 3.2. Udvid opgave 3.2 ved at undersøge for hvilke a matricen er positivt semi-definit.

Cholesky: Lav 3.4 og 3.5 ved at følge metoden i afsnit 3.3.

14. gang, fredag den 25. november. Her gennemgås hovedpunkter fra resten af afsnit 3 i [AJ]. Fokus vil ligge på indholdet i Proposition 3.7 og Theorem 3.11 om Cholesky faktorisering. Desuden afsnit 3.3 om udregning af Cholesky faktorisering, hvor udgangspunktet er Proposition 2.7.

Desuden gennemregnes nogle eksempler på de gennemgåede matrix faktoriseringer.

Vi ser også på følgende opgaver:

LU-faktorisering: Bestem LU-faktoriseringen for matricen A i Example 3.10. (Facit: Se eksemplet nederst.)

Positivt definit: Løs opgave 3.1PW.

Vis at for at $A_{m,m}$ har en Cholesky faktorisering (dvs. $A = R^*R$ for R positivt definit ØT-matrix), så er det en nødvendig betingelse, at A selv er positivt definit.

Cholesky: Find Cholesky-faktoriseringen af A fra Example 3.10. (Facit: Se Example 3.11—er det korrekt ?)

Betragt dernæst $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ Godtgør at A er positivt definit; bestem dernæst Cholesky-faktoriseringen af A. (Facit: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.)

Samme opgave med matricen $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen