Oversigt nr. 1

Lærebøgerne for kurset er

[SA] Sheldon Axler, *Linear algebra done right*, 3. udgave, Springer 2015.

[AJ] *Matrix factorizations*, af Arne Jensen, Aalborg University, August 2016.

[Un] Notesæt om unitære or ortogonale operatorer og matricer.

Sidstnævnte kan tilgås som en PDF-fil på kursets moodle-side.

Tentativ lektionsplan

Uge	Dato	Seance	Emner (Opdateret pér 22/11)
36	5/9	1	kapitel 1: Vektorrum. Underrum. Direkte sum.
37	12/9	2	kapitel 2: Linearkombinationer og spæn. Lineær (u)afhængighed.
			Frembringersæt. Basis og dimension. Koordinater.
38	19/9	3	kapitel 3.A–3.C: Lineære afbildninger. Nulrum og billeder.
			Dimensionssætningen. Matricer for lineære afbildninger.
	22/9	4	kapitel 3.D: Inverterbarhed. Isomorfe vektorrum.
			kapitel 5.A: Invariante underrum: Egenværdier og egenvektorer.
39	26/9	5	kapitel 5.B: Egenværdier—øvre trekantsmatricer.
			kapitel 5.C: Egenrum—diagonalisering.
	29/9	6	kapitel 6: Indre produkt rum.
40	3/10	7	6.C: Ortogonalt komplement, ortogonal projektion. Minimering.
44	6/10		1. selvstudium: Polynomier i lineær algebra (kapitel 4).
41			Miniprojekt: Vektorrum af polynomier.
43	24/10	8	kapitel 10.A: Basis- og Koordinatskifte.
			kapitel 10.B(uddrag): Determinanter af matricer. Permutationer.
	27/10	9	kapitel 7.A: Adjungeret operator. Normale operatorer.
44	31/10	10	kapitel 7.B: Spektralsætningen. Ortogonal diagonalisering.
	2/11		2. selvstudium: Kvadratrødder af matricer og operatorer.
	3/11	11	kapitel 7.C: Positive operatorer. Isometrier. Unitære opr./ matricer.
			[AJ]: Faktorisering af matricer.
45	6/11		3. selvstudium: LU-faktorisering af matricer.
	10/11	12	[AJ] afsnit 5: Singulær værdi dekomposition (SVD).
46	17/11	13	Afrunding af SVD.
47	21/11		4. selvstudium: Fuld SVD og anvendelser af SVD.
	24/11	14	[AJ] afsnit 3: Cholesky faktorisering. Afrunding af kurset.

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- I. Lankham, B. Nachtergaele og A. Schilling, *Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, Lecture notes for MAT67, University of California Davis, update January 2, 2016.
- Gilbert Strang: *Linear algebra and its applications*, Thomson Brooks/Cole, 2006.

I den første af disse er fremstillingen relativt tæt på tankegangen hos [SA].

Hjemmeforberedelse til 1. gang. Læs først kapitel 1.A–B i [SA] som en optakt, og sammenlign hvad der står om de komplekse tal $\mathbb{C}$ med hvad du lærte på 1. år. Prøv også at finde de 8 basale regneregler for vektorer i $\mathbb{R}^n$ i din bog fra første studieår.

Forsøg dernæst at læse om *emnerne* i afsnittene 1.A–1.C i [SA]—sæt gerne en streg i margin ud for de ting du går i stå ved. (Nærlæsning færdiggøres efter forelæsningen).

Første gang, tirsdag den 5. september kl. 8.15–12. Først mødes vi til forelæsning kl. 8.15 i auditorium 5.034, hvor jeg begynder med et par ord om organiseringen af kurset.

Dernæst tager vi fat på stoffet, hvoraf jeg stiler mod at nå hele kapitel 1 (med vægt på det der er nyt i sammenligning med første studieår).

Regneøvelserne bliver:

Vektorrum: Bestem først $\vec{x}+\vec{y}$ og $(3+\mathrm{i})\vec{x}$ når vektorerne er givet i $\mathbb{C}^3$ som

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -4\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Med sædvanlig addition og skalarmultiplikation, afgør om $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ er et vektorrum over $\mathbb{R}$. Er $\{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$? Hvordan så med mængden $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$? Eller $\{(x,2) \mid x \in \mathbb{R},\ x \geq 0\}$?

Modsat vektor: Er det korrekt at $-(-\vec{v}) = \vec{v}$?

Nulreglen: Nulreglen udsiger at

$$a\vec{v} = \vec{0} \iff a = 0 \text{ eller } \vec{v} = \vec{0}.$$

Find først det eller de steder i [SA], som giver den ene implikation.

Bevis dernæst den omvendte implikation. NB: Retfærdiggør hvert argument ved at henvise til axiomerne for vektorrum på side 12.

Underrum: Afgør om de følgende delmængder af $\mathbb{C}^3$ er underrum:

$$\begin{aligned} \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 4\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 z_2 z_3 = 0\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 = 5z_3\,\} \end{aligned}$$

Sum af underrum: Antag at U er et underrum af V. Hvad er da definitionen af $U+U$? Er udsagnet $U+U=U$ sandt eller falsk ?

Hjemmeopfølgning. Nærlæs de gennemgåede afsnit 1.B–1.C i detaljer—brug papir og blyant til at kontrollere udregningerne/levere de manglende udregninger !

Regn dernæst resten af opgaverne ovenfor.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 2

I bør nu nærlæse hele kapitel 1 hjemme. Og dernæst forsøge at regne nedenstående opgaver til 2. kursusgang: Hvis I kan det, vil det være fint(!), og hvis ikke, så vil I være klar til at bede om hjælp til dem straks fra *øvelsernes begyndelse* !

2. gang, tirsdag den 12. september kl.8.15–12. Ved dagens forelæsninger vil vi stile mod at nå igennem kapitel 2 iht. programmet.

Vi vil gå kortfattet gennem 2.A, så repeter hjemmefra begreber fra 1. år som

- linearkombination
- spænd af vektorer, $\operatorname{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$
- lineær (u)afhængighed.

Dagens øvelser vedrører:

Vektorrum: Regn 1.B.3 og 1.B.4 til at belyse axiomerne for vektorrum i 1.19.

Eventuelt opgave 1.B.5* (for de nørdede).

Eksempler: Afgør om $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & a+b \\ a+b & a \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$ udstyret med sædvanlig addition og multiplikation med tal af 2×2-matricer udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$.

Fortsæt med at vise at $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0\}$ udgør et reelt vektorrum. (*Vink:* Hvad er den smarte indfaldsvinkel ?)

Underrum: Regn 1.C.3, 1.C.4, 1.C.5, 1.C.6, 1.C.9.

Modeksempel: Gennemsku opgave 1.C.7 og fortsæt med 1.C.8.

Direkte summer: Lav 1.C.20 og 1.C.21. Eventuelt 1.C.24*.

Bevis-opgaver: Regn opgaverne 1.C.10, 1.C.19 og 1.C.23.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 3

Idag nåede vi til og med halvdelen af side 40 i [SA] plus side 44 om dimension.

Forslag: Nærlæs selv beviset for "2.29 Criterion for basis". Luk bogen. Formuler 2.29 med papir og blyant—og nedskriv selv et bevis for 2.29 på dansk.

NB. Tallene $a_1, \dots, a_n$ i formel 2.30 kaldes v's *koordinater* mht. basen $(v_1, \dots, v_m)$.

3. gang, tirsdag den 19. september. Vi gør først kapitel 2.B og 2.C færdigt.

Dernæst gennemgår vi mest muligt af kapitel 3.A–3.C, som i nogen grad bør se velkendt ud. Men til forskel fra 1. år, hvor der blev lagt stor vægt på matricer, så vil vi nu fokusere på *lineære afbildninger*, da disse udgør det mere fundamentale begreb. Læg f.eks. mærke til at matricerne først kommer i afsnit 3.C.

Som opgaver tager vi disse (hvor "nem" = "kort svar findes"):

Underrum (nemme): Med $C(I, \mathbb{C})$ betegnes mængden af komplekse funktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$, der er kontinuerte ($I \subset \mathbb{R}$ et interval). Godtgør at $C(I, \mathbb{C})$ er et underrum af $\mathbb{C}^I$ — er $C(I, \mathbb{R})$ også et vektorrum ?

Lineær (u)afhængighed: For hvilke tal $\lambda \in \mathbb{R}$ er sættet $\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$ lineært afhængigt i $\mathbb{R}^3$?

Og for hvilke λ er sættet $(\sin^2 x, \cos(2x), \lambda)$ lineært afhængigt i $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Regn så 2.A.7. (*Nem:* Opskriv en lineær relation mellem vektorerne, og ...)

Fortsæt med 2.A.8 og 2.A.11 (brug en sætning). Evt. 2.A.5*.

Basis: Vis at $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ udgør et lineært uafhængigt sæt i $\mathbb{R}^3$ (brug gerne rækkeoperationer).

Godtgør så at (v_1, v_2, v_3) endda er en basis for $\mathbb{R}^3$. Find koordinaterne for $w = (1, -2, 5)$ mht. denne basis.

Dimension: Bestem dimensionen af $\mathbb{C}^3$ (nem). Eftervis at $\mathbb{C}^3$ er frembragt af vektorerne $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}$ (nem).

Bevis eller modbevis: (v_1, v_2, v_3) udgør en basis for $\mathbb{C}^3$.

Udtynding til basis: Vis at $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, -1, -2)$ og $(1, 0, 1)$ udgør et frembringersæt for $\mathbb{R}^3$. Udtynd dernæst sættet til en basis for $\mathbb{R}^3$ ved at bruge metoden fra beviset for Udtyndingssætningen 2.31.

Uendeligdimensionale rum: Lav 2.A.15. Fortsæt evt. med 2.A.14*; og 2.A.16*.

Bevis-opgaver: Regn 2.A.1. Gå videre med 2.A.6.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 4

Sidste gang nåede vi til og med side 62. Dog må I selv læse beviset for 3.19.

Hjemmeforberedelse: Læs resten af kapitel 2 grundigt igennem, check detaljerne med papir og blyant. Regn dernæst følgende (uden at kigge i kapitel 2):

Sandt/falsk: Bevis eller modbevis følgende for det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^4$:

(a) $\dim V = 4$.

(b) $\operatorname{span}((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1) = V$.

(c) Sættet $((1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(-1,0,0,1))$ er lineært uafhængigt i V.

(d) Ethvert sæt $(v_1,\ldots,v_4)$ af fire vektorer i V sådan at $\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_4) = V$ er lineært uafhængigt.

(e) For hvert par v_1, v_2 af llineært uafhængige vektorer i V eksisterer der vektorer u og w i V sådan at (v_1, v_2, u, w) er en basis for V.

Læs dernæst kapitel 3 frem til side 62—check detaljerne med papir og blyant.

4. gang, fredag den 22. september. Først gennemgår vi resten af kapitel 3.B og 3.C–3.D, dog lidt summarisk i 3.C, da noget vil være tæt på et gensyn fra basis.

Dernæst tager vi hul på kapitel 5.A om egenværdier mm. (dog ikke kvotient operatorer på side 137).

Ved øvelserne ser vi på følgende emner:

Supplering til basis: Lav først 2.C.1 med afsæt i 2.26.

Gå videre til 2.B.3; ad (c): inddrag 2.34. Hvad er $\dim U$? Lav så 2.B.4.

Prøv også 2.C.4 om $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, og angiv dimensionen af U. (*Vink:* Gæt en basis med 4 vektorer for U, og brug 2.C.1 til at bevise at du har gættet rigtigt.)

Grassmanns dimensionsformel: Brug formlen i 2.43 til at regne 2.C.12. Lav dernæst 2.C.13.

Linearitet: Vis at man som alternativ definition af linearitet kunne bruge formuleringen: $T\colon V \to W$ er lineær hvis der for alle $u, v \in V$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ gælder at $T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv$.

Udled at $T \circ S$ er lineær, når $S\colon U \to V$ og $T\colon V \to W$ begge er lineære afbildninger. Find stedet hvor dette står i [SA] !

Regn så opgave 3.A.1 (nem). Dernæst 3.A.3 (brug en basis).

null og range: Gennemsku 3.B.2 !

Bevis-opgaver: Lav først 2.C.15 (nem). Fortsæt med 2.C.16*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 5

Vi nåede idag at færdiggøre til og med afsnit 3.D i [SA] om isomorfe vektorrum. Læs selv beviset for (b) $\Longrightarrow$ (c) i hovedsætningen 3.29—indse at dagens opgave opgave 2.C.1 benyttes stiltiende !

Nærstuder også hvordan (vores bevis for) 3.5 fra sidste gang bruges både i 3.59 og 3.60.

5. gang, tirsdag den 26. september. Vi begynder med at gennemgå kapitel 5.A om egenværdier og -vektorer samt egenrum for lineære operatorer (endomorfier). Repeter disse begreber inden forelæsningen.

Da afsnit 5.B er noget tungt, bedes I også se nærmere på side 147, 150, 152 om øvre trekantsmatricer (hvad er det ?—hvorfor har de interesse ?).

Dernæst fortsætter vi i 5.C og diagonalisering af operatorer.

Opgaverne tager vi indenfor emnerne:

Linearitet: Regn 3.B.3 (nem). Fortsæt med 3.B.9+10.

Vektorrum: Genkender du rummet $\mathbb{C}^M$ i tilfældet hvor $M = \{1, 2, \dots, n\}$?

Genkender du også rummet $\mathbb{C}^M$, hvis $M = \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\}$? Forklar hvorfor matrixrummet $\mathbb{F}^{m,n}$ er et vektorrum.

Inverterbarhed: Hvilken sætning i bogen tillader en at slutte at T^{-1} eksisterer netop når matricen $M(T)^{-1}$ eksisterer ? Hvordan ser man dernæst at

$$M(T^{-1}) = M(T)^{-1} \quad ?$$

Brug dette til at vise: $T \in \mathcal{L}(V, W)$ og $S \in \mathcal{L}(W, V)$ opfylder $ST = I$ hvis og kun hvis $TS = I$. (NB. $\dim V = \dim W$ er nødvendigt, se 3.59.)

Nulrum: Begynd med 3.B.15. Fortsæt med 3.B.13.

Dimensionssætningen: 3.B.6+22+23.

Matricer: Lad T være den operator på $\mathbb{C}^3$ der er givet ved

$$T(x, y, z) = (\mathrm{i}\, y, x + 2\,\mathrm{i}\, y + z, (1 + \mathrm{i})z).$$

Find så standard matricen for T.

Betragt så basen $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ for $\mathbb{C}^3$: Find da matricen $M(T)$ mht. denne basis.

Fortsæt med 3.C.2 og 3.C.6*.

Injektiv/surjektiv/inverterbar: Regn 3.D.1+9 og 3.D.13.

Isomorfi: Regn 3.D.14 og 3.D.8*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 6

Idag fik vi gennemgået kapitel 5.A og 5.B samt definitionen af egenrum i 5.C.

På opfordring kommer her et løsningforslag til bevis-opgaven 3.D.14. Dette er for at I kan se et eksempel på hvordan det kan gøres. Forslaget er, at I først stopper læsningen af disse linier og af egen drift prøver at regne 3.D.14.

Forslag. I 3.D.14 betragets den lineære afbildning $T\colon V \to \mathbb{F}^n$, der sender enhver vektor $v \in V$ over i sin koordinatsøjle mht. en given basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ for V; dvs. $Tv = [v]_\mathcal{B} = [c_1 \dots c_n]^\mathrm{T}$ når $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$. Afbilningen er lineær, for hvis $w = d_1v_1 + \dots + d_nv_n$ så er $v + w = (c_1 + d_1)v_1 + \dots + (c_n + d_n)v_n$, hvilket viser at $T(v+w) = [v+w]_\mathcal{B} = [c_1+d_1 \ \dots c_n+d_n]^\mathrm{T} = [c_1 \dots c_n]^\mathrm{T}+[d_1 \dots d_n]^\mathrm{T} = [v]_\mathcal{B} + [w]_\mathcal{B} = Tv + Tw$. Tilsvarende ses at $T(av) = aTv$. Hvis $Tv = 0$ så er alle v's koordinater lig nul, men så er v jo nul. Derfor er T injektiv. Givet $u \in \mathbb{F}^n$, så er $u = [a_1 \dots a_n]^\mathrm{T}$ for visse skalarer a_j, og derfor kan vi betragte vektoren $v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Fordi v's koordinater er entydigt bestemte viser dette at $[v]_\mathcal{B} = u$, dvs. at $Tv = u$. Dermed er T surjektiv. I alt ses at T er lineær og inverterbar; T er derfor en **isomorfi**, som ønsket.

6. gang, fredag den 29. september 2017. Stoffet til dagens forelæsning bliver først fremmest kapitel 5.C om diagonalisering af operatorer. Siden 6.A+6.B (dog ikke side 187–189) om indre produkter og normer, ortogonalitet mm.

Opgaverne til øvelserne:

Egenværdier: Begynd med 5.A.30 (den er sød, bliv ikke forvirret). Fortsæt med 5.A.7, 5.A.21, 5.A.13*, 5.A.23*.

Egenvektorer: 5.A.9.

Invariante underrum: Regn 5.A.2+3+4.

Inverterbarhed: Regn både 5.B.14 og 5.B.15. Forstå også kommentaren til opgaven !

Operatorer indsat i polynomier: Regn 5.B.2—brug gerne ideen fra beviset for 5.21.

Desuden 5.B.5, 5.B.10 og 5.B.11.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 7

Idag nåede vi til og med side 170.

7. gang, tirsdag den 3. oktober. Vi fortsætter gennemgangen af kapitel 6 i [SA]. (Eventuelt dele af 10.A, hvis vi når så langt.)

Opgaver i emnerne:

Diagonalisering: Fibonacci-tallene F_n er $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ (kendt f.eks. fra "da Vinci mysteriet" af Dan Browne). Indse først, at talfølgen (F_n) kan fås ved gentagen anvendelse af T fra opgave 5.C.16 på $(0, 1)$.

Regn dernæst 5.C.16 ved at benytte definitioner og sætninger fra [SA]. Tillægsspørgsmål: Er T *diagonaliserbar* ?

Følg op* med at vise at Fibonacci-tallene—højst overraskende—opfylder at

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Vink: Analyser $T^n(0,1)$ via koordinaterne $c_\pm = \frac{\pm\lambda_\pm}{\sqrt{5}}$ for $v = (0,1)$ mht. basen i (c); udnyt at $\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right| < 1$ til at vise at $\lambda_+^{-n}T^n(0,1) \to \frac{1}{\sqrt{5}}(1, \lambda_+)$.

λ_+ er "det gyldne snit", som har været kendt siden oldtiden: Det er forholdet mellem de to kanter x og y i et rektangel, som er naturligt i den forstand at $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}$; dvs. at mindste kant, x, forholder sig til den største, som denne forholder sig til summen.

Indre produkt: Regn 6.A.1+2.

Udled polariseringsidentiteterne in opgave 6.A.19+20. (Skal bruges senere i kurset.)

Norm: Normer er defineret i opgave 6.A.21. Vis først at udtrykket $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|$ giver en norm på $\mathbb{R}^2$. (Denne er af oplagte grunde kendt som Manhattan-normen !). Vis at denne norm ikke opfylder parallellogram identiteten.

Regn så 6.A.21*.

Ortogonal komplement: Vis påstanden om at $U_1 \subset U_2$ medfører $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

Giv dernæst et bevis for 6.50.

Ortonormale baser: Bestem en ortonormal basis for $\operatorname{null} T$, når T er givet ved den 4×4-matrix hvori alle indgange er lig med 1.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 8

1. selvstudium, 6. oktober. Her skal I læse kapitel 4 i [SA] om polynomier: Dette vil danne nyttig baggrundsviden for både regning af opgaver, forståelse af beviser, og ikke mindst miniprojektet i uge 41.

Mit forslag er, at I læser side 118–119 grundigt hjemmefra: Er der noget nyt ? Desuden at I læser om emnerne i resten af kapitel 4 inden den 6. oktober.

Opgaverne[1] I skal lave er følgende:

(1) Nærlæs beviset for sætning 4.7. Midt på side 120 nævnes trekantsuligheden—hvor står den og hvordan udnyttes den konkret her ?

(2) Lige efter beviset side 120 nævnes et entydighedsresultat—skriv dette ud som en sætning med alle detaljer. (Se evt. noter fra tidligere forelæsning.)

(3) Nederst side 120: Hvorfor er det veldefineret at tale om graden af et polynomium $p(z) = a_+ a_1 z + \cdots + a_m z^m$? (Hvad er problemet ?)

(4) Check påstanden i boksen side 120 nederst. (Hvorfor kan man ikke bare give nulpolynomiet graden 0 ?)

(5) I sætning 4.8 skal ligningen læses som en division af p med s (som producerer en kvotient q, med r til rest). Overvej det rimelige i den udlægning.

(6) Læs beviset for eksistens- og entydighedsudsagnene i 4.8—og nyd hvordan lineær algebra indgår på fornem vis.

Bemærk at 3.71–3.76 om produktrum på side 91–92 er nødvendig baggrundsviden (som I også skal læse…).

(7) Læs og forstå 4.11 om rødder. Bevis så at der i 4.11 gælder at

$$\deg q \leq \deg p - 1.$$

(Brug entydighedresultatet fra side 120.)

(8) Læs og forstå 4.12 med bevis. Gør især rede for påstanden "Clearly…" !

(9) Læs optakten til og indholdet af Algebraens Fundamentalsætning 4.13. (Hvis beviset ser flot ud, så vælg Kompleks funktionsteori på 4. semester…)

(10) Nærstuder induktionsbeviset for 4.14 (som også af og til bliver omtalt som Algebraens Fundamentalsætning). I sidste linie bør der nok stå "the λ_i's" henholdvis "the τ_i's for $i \geq 2$".

(11) Fortsæt med 4.15–4.17 om faktorisering af reelle polynomier. Eventuelt kan I begynde med 4.16 om andengradspolynomier—bemærk hvordan den kendte løsningsformel udnyttes i beviset til at lave faktoriseringen (dette kan I få brug for i opgaverne!)

Regn opgaverne 4.2+4+7 (nemme).

Med venlig hilsen
Jon

[1] Benjamin har lovet at bistå jer kl. 8-12 via lektiecafeen.

Oversigt nr. 9

Den 8. gang gennemgik vi skift af baser i almene vektorrum og de tilhørende formler for vektorers koordinatskifte og lineære operatorers matrixskifte.

I kort form fandt vi ved overgang fra en basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ til en ny basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ for V, at der er en inverterbar basisskifte-matrix S givet ved

$$[v_1 v_2 \dots v_n] = [w_1 w_2 \dots w_n] S. \tag{1}$$

Denne matrix S virker så også som *koordinatskiftematrix* og ved *matrixskifte*, idet

$$[u]_\mathcal{C} = S[u]_\mathcal{B} \qquad \text{for alle } u \in V, \tag{2}$$

$$[T]_\mathcal{C} = S[T]_\mathcal{B} S^{-1} \qquad \text{for alle } T \in \mathcal{L}(V). \tag{3}$$

Dernæst gennemgik vi den oprindelige definition af determinanter ved hjælp af permutationer i Definition 10.27–10.33. Defineret således, kan determinanten udregnes ved at udvikle efter en vilkårlig række, eller en vilkårlig søjle (en sætning der *ikke* findes i [SA]!) og derfor giver alle disse udviklinger samme tal.

3×3-reglen blev udledt som et specialtilfælde.

Endelig så vi på eksamensopgave nr. 1 og nr. 2 fra januar 2017.

9. gang, fredag den 27. oktober. Her vil vi påbegynde kapitel 7A+B i [SA] om *spektralsætningen*. Denne store hovedsætning udsiger, at en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ er *ortogonalt* diagonaliserbar hvis og kun hvis T er normal (dvs. $T^*T = TT^*$).

Geometri: Lav 6.A.31 om Apollonius's identitet (nem).

Koordinatskifte: Find matricen A for operatoren D givet ved differentiation i $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, idet $A = [D]_\mathcal{B}$ og $\mathcal{B} = (1, z, z^2)$ betegner den naturlige basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$. Find så matricen S, som skifter koordinater til basen $\mathcal{C} = (z^2, (z-1)^2, (z-2)^2)$. Bestem endelig matricen $B = [D]_\mathcal{C}$, enten direkte eller via (3).

Bevis at matricen S i (1) nødvendigvis er inverterbar. Udled omvendt, at for enhver inverterbar matrix S er sættet $v_1, \dots, v_n)$ defineret ved (1) en basis.

Ortogonalitet: Antag at V er et indre produkt rum med o.n.b. $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Udled da færdige formler for $[u]_\mathcal{E}$ og $[T]_\mathcal{E}$ samt for skiftematricen S i (1) og (3) når $(w_1, \dots, w_n)$ også er en o.n.b.

Regn så 6.C.1+3+4.

Ortogonal projektion: Regn 6.C.5 og 6.C.8.

Determinanter: Brug definitionen til at verificere påstanden i 10.43 om at matricen har determinant -3.

Desuden kan I regne nr. 2 fra februar 2017, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 10

Idag gennemgik vi afsnit 7.A, med en afstikker undervejs til 6.42 om repræsentation af funktionaler.

Bemærk i øvrigt, at sætning 7.10 kan formuleres præcist som $M(T^*) = M(T)^*$, idet den *adjungerede* matrix $M(T)^*$ fås ved at transponere og konjugere $M(T)$.

Dette er dog kun rigtigt, når matricerne beregnes med hensyn til en *ortonormal* basis. Mere præcist, for enhver ortonormal basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ for V, så gælder for alle operatorer $T \in \mathcal{L}(V)$ med at $[T]_\mathcal{E} = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n})$ at

$$[T^*]_\mathcal{E} = [T]^*_\mathcal{E} \qquad = (\overline{a_{j,i}})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n}.$$

10. gang, tirsdag den 31. oktober. Her gennemgår vi kapitel 7.B om den reelle og komplekse spektralsætning.

Opgaverne tages i emnerne:

Adjungeret operator: Lav først 7.A.1. Brug så definitionen af den adjungerede til at regne 7.A.2.

Selvadjungerede operatorer: Hvilke af følgende matricer er selvadjungerede ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7-\mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 5 \\ 7 & 5 & 5+7\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & 3+4\mathrm{i} & 5-6\mathrm{i} \\ -3-4\mathrm{i} & 7 & 8-9\mathrm{i} \\ 6\mathrm{i}+5 & 9\mathrm{i}+8 & -1 \end{pmatrix}$$

Analyser så om enhver operator $T \in \mathcal{L}(V)$ opfylder

$$T = R + \mathrm{i}\, S \quad \text{for } R = R^*,\ S = S^*.$$

Normale operatorer: Hvilke af følgende matricer er normale ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & \mathrm{i} & -5 \\ -7 & 5 & 7\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3+4\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 7 & -2\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Ortogonal diagonalisering: Hvilke af de ovenstående matricer er ortogonalt diagonaliserbare ?

Ortogonal komplement: Regn 7.A.3. Fortsæt med 7.A.4, eventuelt 7.A.5.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 11

2. selvstudium, den 2. november: Kvadratrødder af Positive Operatorer.

Temaet er, at I skal lære at "tage kvadratroden" af en positiv operator, og at spektralsætningen er et *meget* bekvemt hjælpemiddel hertil.

Allerførst: Når T er en operator på et indre produkt rum V af dimension $n \in \mathbb{N}$, så siges $R \in \mathcal{L}(V)$ at være en *kvadratrod* af T dersom

$$R^* R = T. \tag{4}$$

I så fald tillader (!) man sig at skrive, at $R = \sqrt{T}$.

I det simple tilfælde at $V = \mathbb{R}$ ved vi jo godt at $\sqrt{t}$ kun er defineret for $t \geq 0$. Derfor må vi også forvente at få brug for et positivitetsbegreb for operatoren T:

Definition 7.31. *En operator $T \in \mathcal{L}(V)$ kaldes* positiv *dersom $T^* = T$ og*

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \qquad \textit{for alle } v \in V. \tag{5}$$

I så fald skrives $T \geq 0$.

Dagens opgaver er følgende: [2]

(1) Lav først en analyse: Vis at hvis T har en kvadratrod R, som defineret i (4), så gælder nødvendigvis at $T^* = T$ og at $T \geq 0$; jvf. (5).

(2) Og så til syntesen: Når $V = \mathbb{C}^n$ og $Tv = Av$, hvor $A_{n,n}$ betegner T's matrix mht. den naturlige basis, så søger vi $R_{n,n}$ sådan at $R^* R = A$.

Begynd med tilfældet $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) =: D$ er en diagonalmatrix. Hvad skal der her gælde om tallene $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ for at $D^* = D$ og $D \geq 0$? Kan du for sådanne D bestemme $B_{n,n}$ sådan at $B^* B = D$?

Vis nu for almene A opfyldende $A^* = A$ og $A \geq 0$ at der eksisterer en kvadratrod af A, dvs. $R_{n,n}$ opfyldende $R^* R = A$. (*Vink:* Faktoriser A; husk at S i (3) kan vælges så $S^* = S^{-1}$.)

(3) Og så det almene tilfælde: Når $T^* = T \geq 0$ på V, så findes en operator R på V sådan at $R^* R = T$. (*Vink:* Spektralsætningen og 3.60.)

(4) Post festum-analysen: Udled at når $R = \sqrt{T}$, så gælder endda at $RR = T$ (*vink:* $R^* = R$ følger af at $M(R^*) = M(R)$). Vis at $R \geq 0$ kan opnås.

(5) Nedvarmning: Verificer at man for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan nøjes med at skrive selve uligheden i Definition 7.31: Det følger da at $T^* = T$ (vha. polarisering).

Gennemregn også 7.32 og 7.34 i [SA]. Ser sidstnævnte ikke mystisk ud ?

Læs mere om positive operatorer og kvadratrødder på de første 3 sider i afsnit 7.C. NB. Hos Axler er en kvadratod defineret lidt anderledes ved at $R^2 = T$—men det er en ækvivalent definition, jvf. 7.35 og (4) ovenfor.

Med venlig hilsen
Jon

[2] Ved problemer: Spørg i Lektiecafeen eller nabogruppen, evt. næste kursusgang fredag den 3.

Oversigt nr. 12

Forslag til besvarelse. På oversigt nr. 10 skulle man afklare om enhver operator T på et komplekst indre produkt rum V kan skrives på formen $T = R + \mathrm{i}\, S$ for passende valgte selv-adjungerede operatorer R og S på V.

Analyse: Formlen medfører at $T^* = (R + \mathrm{i}\, S)^* = R^* + \bar{\mathrm{i}} S^* = R - \mathrm{i}\, S$ pga. reglerne for adjungering. Ved addition ses så at $T + T^* = 2R$, mens subtraktion giver $T - T^* = 2\,\mathrm{i}\, S$. Eneste mulighed er altså $R = \frac{1}{2}(T + T^*)$ og $S = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(T - T^*)$.

Syntesen: Indfører vi R og S i $\mathcal{L}(V)$ ved formlerne ovenfor, så er det oplagt $T = R + \mathrm{i}\, S$, og da regnereglerne for adjungering giver $R^* = R$ hhv. $S^* = S$ (verificer!), så har disse valg af R og S de ønskede egenskaber. (NB. I analogi med komplekse tal bruger man også notationen $T_{\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}(T + T^*)$ og $T_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(T - T^*)$.)

Sidste gang gennemgik vi afsnit 7.B. Vi fik formuleret og bevist Spektralsætningen 7.24. Den udsiger at $T \in \mathcal{L}(V)$ er normal (dvs. $T^*T = TT^*$), netop når T er *ortogonalt* diagonaliserbar (dvs. at V har en *ortonormal* basis af egenvektorer for T).

Dog ender beviset for at (c) $\implies$ (a) noget komprimeret i [SA]. Som sagt, så følger $T^*T = TT^*$ af at matrixtilordningen $T \mapsto M(T)$ er injektiv som afbildning $\mathcal{L}(V) \to \mathbb{C}^{n,n}$, hvilket, da den er lineær, følger hvis $M(T) = 0_{n,n} \implies T = 0$ (som ses let).

Desuden fik vi også bevist den reelle spektralsætning 7.29, som udsiger at på komplekse indre produkt rum er ortogonal diagonalisering ensbetydende med at operatoren T er selvadjunderet; $T^* = T$.

11. gang, fredag den 3. november. Her ser vi på isometrier i afsnit 7.C, idet vi dog vil erstatte det meste af et lidt uddybende notesæt (se min web-side) om unitære/ortogonal operatorer og matricer. Disse benyttes i praksis når man gennmfører en ortogonal diagonalisering, så det vil vi studere i detaljer.

Opgaverne bliver denne gang:

Positive operatorer: Vis at $S + T \geq 0$ når $S \geq 0$ og $T \geq 0$ (nem). Siden 7.C.1 og 7.C.6.

Selvadjungerede operatorer: Lav 7.A.6 og 7.A.7.

Normalitet: Lav ubetinget 7.B.15 !

Spektralsætningen: Regn først 7.B.4. Lav dernæst 7.B.5.

Fortsæt med 7.B.6 og 7.B.7*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 13

3. selvstudium: LU- og LDU-faktorisering af matricer.

Emnet er beskrevet i afsnit 2 af notesættet [AJ], som findes på kursets moodle-side. Kort sagt skal I få at se, at når man laver rækkeoperationer (på en totalmatrix for et ligningssystem $Ax = b$), så bestemmer man implicit også en faktorisering af af koefficientmatricen som $A = LU$, hvorved L er en nedre trekantsmatrix, mens U er en øvre ditto.

Dette er ikke bare sjov: Det er også yderst nyttigt, når ligningssystemer løses på en computer. Denne branche kaldes numerisk lineær algebra. Har man brug for at løse lineære ligningssystemer i industriel skala, så anbefales det at bruge en af software pakkerne på markedet.

Hensigten for dagens selvstudim er meget enkel: Læs, lær og løs !

Afsnit 2.1: Læs afsnittet og kontroller matrixprodukterne i (2.4), (2.6) og i linie lige under (2.7).

Afsnit 2.2: Læs afsnittet og kontroller matrixproduktet midt på side 6.

Indse at bemærkningen om "gathered" øverst side 6 ikke er helt korrekt. *Vink:* Se på -4 i indgang 3,1.

Afsnit 2.3: Læs afsnittet og kontroller matrixprodukterne i Example 2.10.

Mere LU-faktorisering: Regn opgave 2.1 og 2.2.

Regn også 2.4 for at se hvordan rækkeombytninger fører til LU-faktorisering af den permuterede matrix PA; jvf. midten af side 8.

Lav også $PW3$, $PW5$ og $PW6$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 14

12. gang, fredag den 10. november. Vi gennemgår den såkaldte singulære værdi dekomposition (SVD) i afsnit 5 af notesættet [AJ]. Groft sagt giver SVD svaret på spørgsmålet: Hvad gør man når A ikke er diagonaliserbar ?

Opgaverne vedrører:

Unitære matricer: Vis at at $\det(U)\overline{\det(U)} = 1$ når $U_{n,n}$ er unitær (nem), sådan at $\det U = e^{\mathrm{i}\,\theta}$ for et $\theta \in \mathbb{R}$, og specielt at $\det O = \pm 1$, hvis O er ortogonal.

Gennemsku at kravene $U^*U = E = UU^*$ for unitaritet, se noter, er ensbetydende med at søjlerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$—og med at rækkerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$. (Jvf. (II) $\iff$ (III) $\iff$ (IV) i noterne.)

To matricer $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ kaldes *unitært* ækvivalente, dersom $B = UAU^*$ for en unitær matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$. Vis at dette er en ækvivalensrelation.

Positive operatorer: Undersøg om matricerne $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ giver positive operatorer på $\mathbb{C}^2$.

Kvadratrødder: Find kvadratroden $R = \sqrt{A}$ af matricen

$$\begin{pmatrix} 6 & 2+2\,\mathrm{i} \\ 2-2\,\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemærk at R skal have formen $U\,\mathrm{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{8})U^*$ for at være *positiv*.

Facit: $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$.

Ortogonal diagonalisering: Diskuter teoretisk om hver af de følgende matricer er unitært ækvivalent med en diagonalmatrix. Faktoriser i så fald A på formen $A = UDU^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3+\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & -1-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 15

Sidste gang blev der sat tid af til at gennemgå en tidligere eksamensopgave. VI nåede derfor kun til at introducere SVD fra [AJ], at vise den første sætning i afnsit 5, og at formulere sætning 5.8.

13. gang, fredag den 17. november. Vi gør her afsnit 5 i [AJ] færdigt. Desuden tager vi fat på afsnit 3 om Cholesky faktorisering af matricer.

Opgaverne:

Unitær: Vis at når matricen $U_{n,n} = [u_1 u_2 \dots u_n]$ er unitær, så gælder det samme om $\tilde{U} = [e^{\mathrm{i}\,\theta} u_1 u_2 \dots u_n]$. Er der et tilsvarende resultat for en ortogonal matrix $O = [o_1 \dots o_n]$?

Singulære værdier: Udled vha. sætning 5.8 at der for en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ med singulære værdier $s_1, s_2, \dots, s_n$ gælder for alle $v \in V$ at

$$\|Tv\| \leq (\max_j s_j)\|v\|.$$

Brug definitionen til at finde de singulære værdier for $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

SVD: Find både den reducerede og den fulde SVD for ovenstående matrix B. (NB. Pæne tal!)

Lad A være matricen for differentiationsoperatoren D på $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ mht. basen $(1, z, z^2)$. Find så både den reducerede og den fulde SVD for A. Facit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 fundamentale underrum: Beregn først de 4 matricer nævnt side 25–26 i [AJ] for den i opgave 5.2 givne matrix.

Regn 5.1PW. Godtgør dernæst påstanden om de 4 ortogonale projektioner nævnt side 25–26.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 16

Idag gennemgik vi resten af afsnit 5 i [AJ], dog uden at skrive sætning 5.11 og 5.13 op formelt set. Dette overlades til Selvstudium 4.

Beviset for polar dekompositionen $A = QS$ i sætning 5.17 blev givet i alle detaljer. Bemærk at forudsætningen i 5.17 om at A skal være selvadjungeret, som understreget idag, er *unødvendig*.

Pensum. Pensum udgøres af de læste dele af de tre notesæt:

- I [SA] er det Kapitel 1, 2, 3.A–3.D, 3.E side 91–92, 4, 5, 6, 7.A–7.C, 10.A til og med side 298, og 10.B side 311–318.
- Supplerende notesæt [Un] om unitære operatorer og matricer af 1. november (på mit websted).
- Afsnit 1–8 i [AJ].

Dog er afsnit 10.B om permutationer og determinanter [SA] kursorisk (dvs. at man skal kende begreber og resultater derfra, men bliver ikke prøvet i betragtningerne (=beviserne) i afsnittet).

Desuden er afsnit 7 og 8 i [AJ] kursoriske.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 17

4. selvstudium, den 21. november: Reduceret og fuld SVD af matricer.

I dagens selvstudium skal I stifte nærmere bekendtskab med den reducerede SVD: $A = X\Sigma Y^*$, som vi beviste ved dagens forelæsning. Ved at bruge de detaljerede oplysninger i Theorem 5.11 i [AJ] bør I kunne bestemme X, Y og Σ for konkrete matricer A.

Desuden er der den fulde SVD: $A = X_\mathrm{f}\Sigma_\mathrm{f}Y_\mathrm{f}^*$, som er beskrevet i afsnit 5.4. Her skal man som sagt (modsat den reducerede SVD) undlade at ignorere visse vektorer i de ortonomale baser—det giver så flere indgange i matricerne, især en masse nuller i Σ_f.

Man kan nok godt have brug for en fremgangsmåde. Den kunne se sådan ud:

(i) Beregn A^*A (eller AA^*) og find egenværdierne med $\lambda_j > 0$; aflæs dernæst $r = \operatorname{rang} A$ som antallet af disse egenværdier.

(ii) Bestem o.n.b. for V bestående af egenvektorer $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, for A^*A, sådan at $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 = \cdots = 0$. Indsæt i $Y = [v_1 \dots v_r]$; hhv. i $Y_\mathrm{f} = [v_1 \dots v_r \dots v_n]$.

(iii) Opskriv de singulære værdier $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $\lambda_j > 0$ og sæt ind i diagonalmatricen $\Sigma_{r,r}$; suppler med 0-blokke til $\Sigma_\mathrm{f} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

(iv) Udregn $w_j = \frac{1}{\sigma_j}Av_j$ for $j \in \{1, \dots, r\}$ og indsæt i $X = [w_1 \dots w_r]$; suppler med o.n.b. for $\operatorname{null}(A^*)$ til X_f.

(v) Opskriv faktoriseringen $A = X\Sigma Y^*$, hhv. $A = X_\mathrm{f}\Sigma_\mathrm{f}Y_\mathrm{f}^*$.

Dagens opgaver. Mit forslag er at I regner følgende:

(1) Prøv først at bruge Theorem 5.11 og 5.13 til at regne detaljerne efter i Example 5.14. Altså: Hvor kommer matricerne fra i disse faktoriseringer ?

(2) Regn opgave 5.1 (facit nedenfor!). Fortsæt evt. med opgave 5.2.

(3) Mindste kvadraters metode: Læs om hvordan SVD kan bruges her på side 28–29.

(4) Læs mere om anvendelserne af SVD i billedkompression i afsnit 8 (fine billeder!) og om teorien bag i afsnit 7 af [AJ].

NB. Det ene facit i opgave 5.1 er **TUNGT**, nemlig

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix}.$$

Bemærk at de to yderste er unitære, da de har ortonormale søjler hhv. rækker. Desuden er $X = Y$ fordi $A^*A = AA^*$ her.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 18

Facit:. I opgaven med at udføre SVD på matricen B på oversigt nr. 15 finder man følgende reducerede SVD:

$$B = X\Sigma Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Her kan de første to søjler af X ombyttes, hvis man også ombytter de to første søjler af Y. (Ellers kan man ikke opretholde at $w_j = \frac{1}{\sigma_j} A v_j$.)

14. gang, fredag den 24. november. Her gennemgås hovedpunkter fra afsnit 3 i [AJ]. Fokus vil ligge på indholdet i Proposition 3.7 og Theorem 3.11 om Cholesky faktorisering. Desuden afsnit 3.3 om udregning af Cholesky faktorisering, hvor udgangspunktet er LDU-faktoriseringen i Proposition 2.7.

Desuden gennemregnes nogle eksempler på de gennemgåede matrix faktoriseringer.

Vi ser også på følgende opgaver:

SVD: Regn opgave 5.2, hvis du ikke nåede den i 3. selvstudium.

Polar dekomposition: Bestem polar dekompositionen $A = QS$ i Theorem 5.17 i [AJ] for matricerne A og B på oversigt nr. 15. *Vink:* Udnyt at de fulde SVD-faktoriseringer allerede kendes.

Positivt definit: Løs opgave 3.1PW. Evt. også 3.1 og 3.3.

Vis at for at $A_{m,m}$ har en Cholesky faktorisering (dvs. $A = R^*R$ for R positivt definit ØT-matrix), så er det en nødvendig betingelse, at A selv er positivt definit.

Cholesky: Find Cholesky-faktoriseringen af matricen A fra Example 3.10. Facit står i Example 3.13—check om det er korrekt !

Betragt dernæst matricen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Godtgør at A er positivt definit; bestem dernæst Cholesky-faktoriseringen af A. (Facit: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.)

Samme opgave med matricen $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Med venlig hilsen
Jon