Oversigt nr. 1

Lærebøgerne for kurset er

[SA] Sheldon Axler, *Linear algebra done right*, 3. udgave, Springer 2015.

[AJ] *Matrix factorizations*, af Arne Jensen, Aalborg University, August 2016.

[Un] Notesæt om unitære og ortogonale operatorer og matricer.

Både [AJ] og [Un] findes som PDF-filer på kursets moodle-side.

Tentativ lektionsplan

Uge	Dato	Seance	Emner (Opdateret pér 22/08)
36	5/9	1	kapitel 1: Vektorrum. Underrum. Direkte sum.
			kapitel 4: Polynomier.
	6/9	2	kapitel 2: Linearkombinationer og spæn. Lineær (u)afhængighed.
			Frembringersæt. Basis og dimension. Koordinater.
37	12/9	3	kapitel 3.A–3.C: Lineære afbildninger. Nulrum og billeder.
			Dimensionssætningen. Matricer for lineære afbildninger.
38	19/9	4	kapitel 3.D: Inverterbarhed. Isomorfe vektorrum.
			kapitel 5.A: Invariante underrum: Egenværdier og egenvektorer.
40	2/10	5	kapitel 5.B: Egenværdier—øvre trekantsmatricer.
			kapitel 5.C: Egenrum—diagonalisering.
	4/10	6	kapitel 6: Indre produkt rum.
41	8/10		1. selvstudium: Cayley–Hamiltons sætning: $p_A(A) = 0$.
	10/10	7	6.C: Ortogonalt komplement, ortogonal projektion. Minimering.
	11/10	8	kapitel 10.A: Basis- og Koordinatskifte.
			kapitel 10.B(uddrag): Determinanter af matricer. Permutationer.
43	24/10	9	kapitel 7.A: Adjungeret operator. Normale operatorer.
44	31/10	10	kapitel 7.B: Spektralsætningen. Ortogonal diagonalisering.
45	7/11	11	kapitel 7.C: Positive operatorer. Isometrier. Unitære opr./ matricer.
			[AJ]: Faktorisering af matricer.
46	12/11		2. selvstudium: Kvadratrødder af matricer og operatorer.
	14/11	12	[AJ] afsnit 5: Singulær værdi dekomposition (SVD).
47	19/11		3. selvstudium: LU-faktorisering af matricer.
	21/11	13	Afrunding af SVD.
48	26/11		4. selvstudium: Fuld SVD og anvendelser af SVD.
	28/11	14	[AJ] afsnit 3: Cholesky faktorisering. Afrunding af kurset.

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- I. Lankham, B. Nachtergaele og A. Schilling, *Linear algebra as an introduction to abstract mathematics*, Lecture notes for MAT67, University of California Davis, update January 2, 2016.
- Gilbert Strang: *Linear algebra and its applications*, Thomson Brooks/Cole, 2006.

I den første af disse er fremstillingen relativt tæt på tankegangen hos [SA].

Hjemmeforberedelse til 1. gang. Læs først kapitel 1.A–B i [SA] som en optakt, og sammenlign hvad der står om de komplekse tal $\mathbb{C}$ med hvad du lærte på 1. år. Prøv også at finde de 8 basale regneregler for vektorer i $\mathbb{R}^n$ i din bog fra første studieår.

Forsøg dernæst at læse om *emnerne* i afsnittene 1.A–1.C i [SA]—sæt gerne en streg i margin ud for de ting du går i stå ved. (Nærlæsning færdiggøres efter forelæsningen).

Første gang, onsdag den 5. september kl. 8.15–12. Først mødes vi kl. 8.15 til forelæsning i auditorium 5.034, hvor jeg først siger lidt om kursets organisering.

Dernæst tager vi fat på stoffet, hvoraf jeg stiler mod at nå hele kapitel 1 frem til kl. 10 (med vægt på det der er nyt i sammenligning med første studieår).

Det er første gang, så vi har en kort seance med regneøvelser kl. 10–11 i:

Vektorrum: Bestem først $\vec{x}+\vec{y}$ og $(3+\mathrm{i})\vec{x}$ når vektorerne er givet i $\mathbb{C}^3$ som

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \\ 1+2\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+\mathrm{i} \\ -4\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Med sædvanlig addition og skalarmultiplikation, afgør om $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ er et vektorrum over $\mathbb{R}$. Er $\{(x,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$? Eller $\{(x,2) \mid x \geq 0\}$?

Modsat vektor: Er det korrekt at $-(-\vec{v}) = \vec{v}$?

Nulreglen: Nulreglen udsiger at

$$a\vec{v} = \vec{0} \iff a = 0 \text{ eller } \vec{v} = \vec{0}.$$

Bevis den implikation, som Axler forbigår. NB: Retfærdiggør hvert argument ved at henvise til axiomerne for vektorrum på side 12.

Underrum: Afgør om de følgende delmængder af $\mathbb{C}^3$ er underrum:

$$\begin{aligned} \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 4\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 z_2 z_3 = 0\,\} \\ \{\,(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 = 5z_3\,\} \end{aligned}$$

Sum af underrum: Antag at U er et underrum af V. Hvad er da definitionen af $U+U$? Er udsagnet $U+U=U$ sandt eller falsk ?

Klokken 11.15 mødes vi (ekstraordinært) igen i auditoriet 5.034, hvor jeg vil fortælle om polynomier efter kapitel 4 i [SA] . Antageligt når vi side 120–125 og en anvisning på hvordan man foretager polynomiers *division*.

Hjemmeopfølgning. Nærlæs de gennemgåede afsnit 1.B–1.C i detaljer—brug papir og blyant til at kontrollere udregningerne/levere de manglende udregninger ! Regn så resten af opgaverne ovenfor.

Dan dig dernæst et overblik over kapitel 4.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 2

I bør nu nærlæse hele kapitel 1 plus side 120-125 hjemme. Og dernæst forsøge at regne nedenstående opgaver til 2. kursusgang: Hvis I kan det, vil det være fint(!).

Hvis I ikke kan, så vil I til gengæld være klar til at bede om hjælp til dem straks fra *øvelsernes begyndelse* !

2. gang, torsdag den 6. september kl.8.15–12. Ved dagens forelæsninger vil vi stile mod at nå igennem kapitel 2 iht. programmet.

Vi vil gå kortfattet gennem 2.A, så repeter hjemmefra begreber fra 1. år som

- linearkombination
- spænd af vektorer, $\mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$
- lineær (u)afhængighed.

Dagens øvelser vedrører:

Polynomiers division: Divider $p(x) = x^3 - 8x^2 + 19x - 12$ med $s(x) = x - 3$. Undersøg så om $x = 4$ er rod i $p(x)$.

Vektorrum: Regn 1.B.3 og 1.B.4 til at belyse axiomerne for vektorrum i 1.19.

Eventuelt opgave 1.B.5* (for de nørdede).

Eksempler: Afgør om $\left\{ \begin{pmatrix} a & a+b \\ a+b & a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ udstyret med sædvanlig addition og multiplikation med tal af 2×2-matricer udgør et vektorrum over $\mathbb{R}$.

Fortsæt med at vise at $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0\}$ udgør et reelt vektorrum. (*Vink:* Hvad er den smarte indfaldsvinkel ?)

Underrum: Regn 1.C.3, 1.C.4, 1.C.5, 1.C.6, 1.C.9.

Modeksempel: Gennemsku opgave 1.C.7 og fortsæt med 1.C.8.

Direkte summer: Lav 1.C.20 og 1.C.21. Eventuelt 1.C.24*.

Bevis-opgaver: Regn opgaverne 1.C.10, 1.C.19 og 1.C.23.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 3

Idag nåede vi alt det nye i kapitel 2 i [SA], dog pånær 2.34 og 2.43.

Forslag: Nærlæs selv beviset for “2.29 Criterion for basis”. Luk bogen. Formuler 2.29 med papir og blyant—og nedskriv selv et bevis for 2.29 på dansk.

NB. Tallene a_1, …, a_n i formel 2.30 kaldes v's *koordinater* med hensyn til basen $B = (v_1, \dots, v_m)$. Disse organiseres oftest i en søjle kaldet $[v]_B$:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{1}$$

3. gang, onsdag den 12. september. Vi runder 2.B+C af med sætn. 2.34 og 2.43.

Dernæst gennemgår vi mest muligt af 3.A–3.C, som bør se ret velkendt ud. Dog vil vi nu fokusere på *lineære afbildninger*, da disse udgør det mere fundamentale begreb. Læg f.eks. mærke til at matricerne først kommer i 3.C.

Som opgaver tager vi disse:

Underrum (nemme): Med $C(I, \mathbb{C})$ betegnes mængden af komplekse funktioner $f\colon I \to \mathbb{C}$, der er kontinuerte ($I \subset \mathbb{R}$ et interval). Godtgør at $C(I, \mathbb{C})$ er et underrum af $\mathbb{C}^I$ — er $C(I, \mathbb{R})$ også et vektorrum ?

Lineær (u)afhængighed: For hvilke tal $\lambda \in \mathbb{R}$ er sættet $\left(\begin{pmatrix} \lambda \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \lambda \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \lambda \end{pmatrix}\right)$ lineært afhængigt i $\mathbb{R}^3$?

Og for hvilke λ er sættet $(\sin^2 x, \cos(2x), \lambda)$ lineært afhængigt i $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Regn så 2.A.7. (*Nem*[1]*:* Opskriv en lineær relation mellem vektorerne, …)

Fortsæt med 2.A.8 og 2.A.11 (brug en sætning). Evt. 2.A.5*.

Basis: Vis at $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ udgør et lineært uafhængigt sæt i $\mathbb{R}^3$—brug gerne rækkeoperationer.

Godtgør så at $B = (v_1, v_2, v_3)$ endda er en basis for $\mathbb{R}^3$. Find koordinatsøjlen $[w]_B$ for $w = (1, -2, 5)$ mht. denne basis, jævnfør (1).

Dimension: Bestem dimensionen af $\mathbb{C}^3$ (nem). Eftervis at $\mathbb{C}^3$ er frembragt af vektorerne $v_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix}$ (nem).

Bevis eller modbevis: (v_1, v_2, v_3) udgør en basis for $\mathbb{C}^3$.

Udtynding til basis: Vis at $(1,1,0)$, $(0,1,1)$, $(1,-1,-2)$ og $(1,0,1)$ udgør et frembringersæt for $\mathbb{R}^3$. Udtynd dernæst sættet til en basis for $\mathbb{R}^3$ ved at bruge metoden fra beviset for Udtyndingssætningen 2.31.

Uendeligdimensionale rum: Lav 2.A.15. Fortsæt evt. med 2.A.14*; og 2.A.16*.

Bevis-opgaver: Regn 2.A.1. Gå videre med 2.A.6.

Med venlig hilsen
Jon

[1]NB: “nem” = “et kort svar er muligt”

Oversigt nr. 4

Sidste gang nåede vi gennem afsnit 3.B. Dog må I selv læse de små ting i 3.23–24; og gerne side 65–66 for at skabe en solid bro til lineær algebra fra 1. år.

Hjemmeforberedelse: Læs resten af kapitel 2 grundigt igennem, check detaljerne med papir og blyant. Regn dernæst følgende (uden at kigge i kapitel 2):

Sandt/falsk: Bevis eller modbevis følgende for det reelle vektorrum $V = \mathbb{R}^4$:

(a) $\dim V = 4$.

(b) $\operatorname{span}((1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,0,1,1) = V$.

(c) $((1,1,0,0),(0,1,-1,0),(0,0,1,-1),(-1,0,0,1))$ er et lu-sæt i V.

(d) Ethvert sæt $(v_1,\dots,v_4)$ af fire vektorer i V, sådan at $\operatorname{span}(v_1,\dots,v_4) = V$, er lineært uafhængigt.

(e) For hvert par v_1, v_2 af lineært uafhængige vektorer i V eksisterer der vektorer u og w i V sådan at (v_1, v_2, u, w) er en basis for V.

Læs dernæst kapitel 3A+B—check detaljerne med papir og blyant.

4. gang, onsdag den 19. september. Først gennemgår vi resten af kapitel 3.C–3.D, dog lidt summarisk i 3.C, da noget vil være tæt på et gensyn fra basis.

Dernæst tager vi hul på kapitel 5.A om egenværdier mm. (dog forbigås emnet kvotient operatorer på side 137).

Ved øvelserne ser vi på følgende emner:

Supplering til basis: Lav først 2.C.1 med afsæt i 2.26.

Gå videre til 2.B.3; ad (c): inddrag 2.34. Hvad er $\dim U$? Lav så 2.B.4.

Prøv også 2.C.4 om $\mathcal{P}(\mathbb{F})$, og angiv dimensionen af U. (*Vink:* Gæt en basis med 4 vektorer for U, og brug 2.C.1 til at bevise at du har gættet rigtigt.)

Grassmanns dimensionsformel: Brug formlen i 2.43 til at regne 2.C.12 (nem). Lav dernæst 2.C.13.

Linearitet: Vis at man som alternativ definition af linearitet kunne bruge formuleringen: $T\colon V \to W$ er lineær hvis der for alle $u, v \in V$ og $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ gælder at $T(\lambda u + \mu v) = \lambda Tu + \mu Tv$.

Udled at $T \circ S$ er lineær, når $S\colon U \to V$ og $T\colon V \to W$ begge er lineære afbildninger. Find stedet hvor dette faktum står skrevet i [SA] !

Regn så opgave 3.A.1 (nem). Dernæst 3.A.3 (brug en basis).

null og range: Gennemsku 3.B.2 !

Bevis-opgaver: Lav først 2.C.15 (nem). Fortsæt med 2.C.16*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 5

Vi nåede sidste gang at færdiggøre til og med afsnit 3.D i [SA] om isomorfe vektorrum. I beviset for (b) $\Longrightarrow$ (c) i hovedsætningen 3.29 benyttes opgave 2.C.1 (stiltiende hos Axler!).

Eksemplet i 3.70 blev også gennemgået for at illustrere rækkevidden af 3.29.

5. gang, tirsdag den 2. oktober. Vi begynder med at gennemgå kapitel 5.A om egenværdier og -vektorer samt egenrum for lineære operatorer (endomorfier). Repeter disse begreber inden forelæsningen.

Da afsnit 5.B er noget tungt, bedes I også se nærmere på side 147, 150, 152 om øvre trekantsmatricer (hvad er det ?—hvorfor har de interesse ?).

Dernæst fortsætter vi i 5.C om diagonalisering af operatorer.

Opgaverne tager vi indenfor emnerne:

Linearitet: Regn 3.B.3 (nem). Fortsæt med 3.B.9+10.

Inverterbarhed: Hvilken sætning i bogen tillader en at slutte at T^{-1} eksisterer netop når matricen $M(T)^{-1}$ eksisterer ? Hvordan ser man dernæst at

$$M(T^{-1}) = M(T)^{-1} \quad ?$$

Brug dette til at vise: $T \in \mathcal{L}(V, W)$ og $S \in \mathcal{L}(W, V)$ opfylder $ST = I$ hvis og kun hvis $TS = I$. (NB. $\dim V = \dim W$ er nødvendigt, se 3.59.)

Nulrum: Begynd med 3.B.15. Fortsæt med 3.B.13.

Dimensionssætningen: 3.B.6+22+23.

Matricer: Lad T være den operator på $\mathbb{C}^3$ der er givet ved

$$T(x, y, z) = (\mathrm{i}\, y, x + 2\,\mathrm{i}\, y + z, (1 + \mathrm{i})z).$$

Find så standard matricen for T.

Betragt så basen $((1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0))$ for $\mathbb{C}^3$: Find da matricen $M(T)$ mht. denne basis.

Fortsæt med 3.C.2 og 3.C.6*.

Injektiv/surjektiv/inverterbar: Regn 3.D.1+9 og 3.D.13.

Isomorfi: Regn 3.D.14 og 3.D.8*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 6

Igår nåede vi 5.A og 5.B samt 4.13 og 4.14 om faktorisering af polynomier.

På opfordring kommer her et løsningforslag til bevis-opgaven 3.D.14. Dette er for at I kan se et eksempel på, hvordan det kan gøres.

Forslag. I 3.D.14 betragets den lineære afbildning $T\colon V \to \mathbb{F}^n$, der sender enhver vektor $v \in V$ over i sin koordinatsøjle mht. en given basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ for V; dvs. $Tv = [v]_{\mathcal{B}} = [c_1 \dots c_n]^{\mathrm{T}}$ når $v = c_1v_1 + \cdots + c_nv_n$. Afbilningen er lineær, for hvis $w = d_1v_1 + \cdots + d_nv_n$ så er $v + w = (c_1 + d_1)v_1 + \cdots + (c_n + d_n)v_n$, hvilket viser at $T(v+w) = [v+w]_{\mathcal{B}} = [c_1+d_1 \ \dots c_n+d_n]^{\mathrm{T}} = [c_1 \dots c_n]^{\mathrm{T}}+[d_1 \dots d_n]^{\mathrm{T}} = [v]_{\mathcal{B}} + [w]_{\mathcal{B}} = Tv + Tw$. Tilsvarende ses at $T(av) = aTv$. Hvis $Tv = 0$ så er alle v's koordinater lig nul, men så er v jo nul. Derfor er T injektiv. Givet $u \in \mathbb{F}^n$, så er $u = [a_1 \dots a_n]^{\mathrm{T}}$ for visse skalarer a_j, og derfor kan vi betragte vektoren $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$. Fordi v's koordinater er entydigt bestemte viser dette at $[v]_{\mathcal{B}} = u$, dvs. at $Tv = u$. Dermed er T surjektiv. I alt ses at T er lineær og inverterbar; T er derfor en **isomorfi**, som ønsket.

Vedr. beviset for 5.30. I [SA] skal symbolet "dim" fjernes i bevisets 5. sidste linie. Det er en meningsforstyrrende trygfel.

Som lovet bringes en forsimpling af bevisets anden del vha. kontraponering:

> To prove the other direction, suppose that $\mathcal{M}(T)$ in 5.31 has $\lambda_j = 0$ for some $j \in \{1, \dots, n\}$. From the zeroes in the j^{th} row of 5.31 it then follows that T maps $U = \operatorname{span}(v_1, \dots, v_j)$ into $\operatorname{span}(v_1, \dots, v_{j-1})$, which is a proper subspace of U (equalling $\operatorname{span}(\,) = \{0\}$ if $j = 1$). Thus $T|_U\colon U \to U$ is not surjective, hence not injective (by 3.61). Consequently T itself is not injective, and therefore not invertible.

6. gang, torsdag den 4. oktober 2018. Stoffet til dagens forelæsning bliver først fremmest kapitel 5.C om diagonalisering af operatorer. Siden 6.A+6.B (dog ikke side 187–189) om indre produkter og normer, ortogonalitet mm.

Opgaverne til øvelserne:

Egenværdier: Begynd med 5.A.30 (den er sød: Hvad gælder om $\lambda = 9$?). Fortsæt med 5.A.7, 5.A.21, 5.A.13*, 5.A.23*.

Egenvektorer: 5.A.9.

Invariante underrum: Regn 5.A.2+3+4 (nemme).

Øvre trekantsmatricer: Regn både 5.B.14 og 5.B.15. Forstå også kommentaren til opgaven !

Operatorer indsat i polynomier: Regn 5.B.2—brug ideen fra beviset for 5.21.

Desuden 5.B.10 (nem) og 5.B.11; samt 5.B.5.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 7

1. selvstudium, 8. oktober. Her skal I studere Cayley–Hamiltons sætning, der er en klassisk hovedsætning i lineær algebra.

Bemærk at vi i dette emne skifter til 2. udgave af "LA done right", hvor den står som sætning 8.20. Se filen i moodle. Beviset i 8.20 i 2. udgave er mere tilgængeligt (end det som er givet for 8.37 i [SA]).

I skal som sædvanlig tage udgangspunkt i, at for en $n \times n$-matrix A er det karakteristiske polynomium $p(z)$ givet ved at $p(z) = \det(A - zI)$. Det er et polynomium, der kan vises altid at have graden n. Opgaverne[2] til jer er:

(1) Sæt $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. Godtgør at A's karakteristiske polynomium er givet ved $p(z) = \det(A - zI) = z^2 - 5z - 2$. Brug dette til at verificere, at udsagnet i Cayley–Hamiltons sætning, nemlig at $p(A) = 0$, er korrekt i dette tilfælde.

(2) Nærstuder beviset for 4.14 i [SA]. Konkluder så at A's karakteristiske polynomium $p(z)$ har præcis n rødder $z = \lambda_1, \dots, z = \lambda_n$ i den forstand, at $p(z)$ har en faktorisering på formen

$$p(z) = c(z - \lambda_1)(z - \lambda_2)\dots(z - \lambda_n). \tag{2}$$

(Faktoriseringen er entydigt bestemt pånær omnummerering af faktorerne. λ'erne er ikke nødvendigvis forskellige. c er koefficienten til z^n i $p(z)$.)

(3) Skriv nu rødderne i $p(z)$ som indbyrdes forskellige tal $z = \lambda_1, \dots, z = \lambda_m$, hvor altså $m \le n$ er en mulighed. Indse, at $p(z)$ da har faktoriseringen

$$p(z) = c(z - \lambda_1)^{d_1}(z - \lambda_2)^{d_2}\dots(z - \lambda_n)^{d_m}, \tag{3}$$

hvorved d_j er antallet af gange tallet λ_j optræder i faktoriseringen (2). Tallet d_j kaldes *multipliciteten*[3] af egenværdien λ_j.

Dette erstatter definitionen midt på side 171 i anden udgave af bogen.

(4) Regn eksemplet i formel 8.16 side 171 efter: Opskriv matricen $A = \mathcal{M}(T)$ og check at $\lambda = 0$ har multiplicitet 2, mens $\lambda = 5$ kun har multiplicitet 1.

Fortsæt evt. med eksemplet i 8.17 side 171. (Se evt. vinket under 8.19.)

(5) Forklar i *detaljer* hvorfor Cayley–Hamiltons sætning kan konkretiseres til at der i $\mathcal{L}(V)$ gælder at

$$p(T) = c(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)\dots(T - \lambda_m I) = 0. \tag{4}$$

(*Vink:* Kombiner ligning (2) ovenfor med bevisideen i sætning 5.21 i [SA].)

[2] Benjamin har lovet at bistå jer et par timer om eftermiddagen.

[3] I formlen (2) siges egenværdierne at være talt (egl. nummereret) *med* multiplicitet. Til sammenligning er egenværdierne i (3) ikke talt med multiplicitet; derimod fremgår multipliciteterne af eksponenterne $d_1, \dots, d_m$.

(6) Godtgør, at rækkefølgen af faktorerne $(T - \lambda_j I)$ er ligegyldig i punkt (5). (*Vink:* Udnyt sætning 5.20 i [SA].)

(7) Tag fat på beviset for Cayley-Hamiltons sætning s. 173 i anden udgave: Kontroller påstandene der leder op til formel 8.21.

I 8.21 mangler visse parenteser for $j < n$ i sammenligning med faktoriseringen i punkt (5) ovenfor (ikke sandt ?)—indse at formel 8.21 medfører at $p(T)v_j = 0$, således at 8.21 alligevel er tilstrækkelig.

(8) I beviset optræder ordet "induction". Dette er lidt misvisende, da der kun er endeligt mange værdier af indekset j. Tænk over at "in finitely many steps" ville være en mere passende beskrivelse af bevisgangen.

(9) Kontroller nu resten af detaljerne i beviset. Skriv for eksempel $(T - \lambda_j I)v_j$ op som en konkret linearkombination af vektorerne $v_1, \dots, v_{j-1}$, og brug dette til at forklare hvordan "induktionhypotesen" konkret inddrages i bevisets sidste 2 linier.

(10) Sidst men ej mindst: Brug 5 egenskaber ved isomorfien $\mathcal{M}\colon \mathcal{L}(V) \to \mathbb{F}^{n,n}$ (for et vilkårligt, men fast valg af basis i V) til at vise, at der for matricen $A = \mathcal{M}(T)$ gælder det analoge resultat at

$$p(A) = c(A-\lambda_1 I_n)(A-\lambda_2 I_n)\dots(A-\lambda_m I_n) = 0 \qquad \text{i vektorrummet } \mathbb{F}^{n,n}. \tag{5}$$

(*Vink:* Anvend afbildningen $\mathcal{M}$ på begge sider af ligningen $p(T) = 0$.)

Cayley–Hamiltons sætning kan inddrages—gerne med et renskrevet bevis !—i jeres projekter også.

Faktoriseringerne af $p(z)$ ovenfor og begrebet multiplicitet vil fra nu af indgå som centrale sager i resten af LAMA.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 8

Sidste gang nåede vi til og med side 168.

Hjemmeforberedelse: Se venligst Axlers videoer om indre produkt, normer og ortnormale baser. Jvf. mail fra fredag den 5/10.

7. gang, tirsdag den 9. oktober. Vi fortsætter gennemgangen af kapitel 6 i [SA]. Ved forelæsningen vil jeg prøve at fokusere på de dele som Axler ikke dækker i videoerne (det er nogle af de mere komplicerede ting).

Opgaver i emnerne:

Diagonalisering: Fibonacci-tallene F_n er $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$ (kendt f.eks. fra "da Vinci mysteriet" af Dan Browne). Indse først, at talfølgen (F_n) kan fås ved gentagen anvendelse af T fra opgave 5.C.16 på $(0, 1)$.

Regn dernæst 5.C.16 ved at benytte definitioner og sætninger fra [SA]. Tillægsspørgsmål: Er T *diagonaliserbar* ?

Følg op* med at vise at Fibonacci-føljen —højst overraskende—opfylder at

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \to \lambda_+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \text{for } n \to \infty.$$

Vink: Analyser $T^n(0, 1)$ via koordinaterne $c_\pm = \frac{\pm 1}{\sqrt{5}}$ for $v = (0, 1)$ mht. basen i (c); udnyt at $\left|\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right| < 1$ til at vise at $\lambda_+^{-n} T^n(0, 1) \to \frac{1}{\sqrt{5}}(1, \lambda_+)$.

λ_+ er "det gyldne snit", som har været kendt siden oldtiden: Det er forholdet mellem de to kanter x og y i et rektangel, som er naturligt i den forstand at $\frac{y}{x} = \frac{x+y}{y}$; dvs. at mindste kant, x, forholder sig til den største, som denne forholder sig til summen.

Indre produkt: Regn 6.A.1+2.

Udled polariseringsidentiteterne i opgave 6.A.19+20. (Skal bruges senere i kurset.)

Norm: Normer er defineret i 6.A.21. Vis først at $\mathbb{R}^2$ har en norm givet ved

$$\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + |x_2|.$$

(Denne er af oplagte grunde kendt som Manhattan-normen !).

Vis at denne norm ikke opfylder parallelogram identiteten.

Regn så 6.A.21*.

Ortonormale baser: Bestem en ortonormal basis for $\operatorname{null} T$, når T er givet ved den 4×4-matrix hvori alle indgange er lig med 1.

Ortogonal komplement: Vis påstanden om at $U_1 \subset U_2$ medfører $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

Giv dernæst et bevis for 6.50.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 9

Idag nåede vi til og med side 186 i afsnit 6.B og 6.45+46 i afsnit 6.C.

8. gang, torsdag den 11. oktober. Her vil vi først og fremmest gennemgå resten af 6.C.

Desuden vil vi se på basis- og koordinatskifte. Axler skriver en smule om det i 10.2–10.8, men jeg vil basere fremstillingen på følgende formel, hvor $B = (v_1, \dots, v_n)$ tænkes at være en basis for V:

$$v = (v_1 \dots v_n)[v]_B. \tag{6}$$

Bemærk at skalarerne i (koordinat)søjlen $[v]_B$ skal skrives til venstre for vektorerne i (vektor)rækken $(v_1 \dots v_n)$, når række-søjle multiplikationen udføres.

Desuden vil vi omtale permutationsformlen for determinanter i 10.33, som tiden tillader det.

Opgaverne bliver:

Ortogonalt komplement: Regn opgaven derom fra oversigt nr. 8 (hvis du ikke har nået den idag).

Geometri: Regn først rhombe-opgaven 6.A.4 (nem). Fortsæt så med forside-opgaven 6.A.31.

Indre produkt: Lav 6.A.24 (nem). Snup også 6.A.25.

Cauchy-Schwarz: Opgave 6.A.15 kan gennemskues ved at gange med et snedigt 1-tal !

Regn så 6.A.11. Eventuelt 6.A.12*.

Parallelogramidentiteten: Regn 6.A.16 (nem).

Gram–Schmidt ortonormalisering: Lav først 6.B.5. Fortsæt med 6.B.6 (nb: ingen udregninger !).

Diagonalisering: Regn først 5.C.11 (nem). Brug så den teoretiske viden til at lave 5.C.8 og 5.C.7 (nemme).

Fortsættelse fra oversigt 8: Lad igen T være givet ved den 4×4-matrix A hvori alle indgange er lig med 1. Udled nu at $\dim E(0,T) = 3$, og slut så heraf at $\dim E(4,T) = 1$; samt at der ikke er andre egenværdier for T end $\lambda = 0$ og $\lambda = 4$. Bestem så en ortonormal basis for $\mathbb{C}^4$ med hensyn til hvilken $M(T) = \operatorname{diag}(1,1,1,4) = D$. Find endelig en 4×4-matrix P som opfylder $A = PDP^{-1}$.

Facit: $P = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, mens $P^{-1} = P^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 10

I dag gennemgik vi skift af baser i almene vektorrum. I kort form fandt vi ved overgang fra en basis $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ til en ny basis $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ for V, at der er en inverterbar *basisskifte-matrix* S givet ved

$$[v_1 v_2 \dots v_n] = [w_1 w_2 \dots w_n]S. \tag{7}$$

Denne matrix S virker så også som *koordinatskiftematrix* og ved *matrixskifte*, idet

$$[u]_{\mathcal{C}} = S[u]_{\mathcal{B}} \qquad \text{for alle } u \in V, \tag{8}$$

$$[T]_{\mathcal{C}} = S[T]_{\mathcal{B}}S^{-1} \qquad \text{for alle } T \in \mathcal{L}(V). \tag{9}$$

Som supplement så vi at $S = \mathcal{M}(I; \mathcal{B}, \mathcal{C})$; jvf. (7). Desuden er notationen for T's matricer at $[T]_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}(T; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ og $[T]_{\mathcal{B}} = \mathcal{M}(T; \mathcal{C}, \mathcal{C})$.

Dette brugte vi til at udlede matrixversionen af Schurs sætning:

6.38'. *For enhver matrix $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ findes der en inverterbar matrix S i $\mathbb{C}^{n,n}$, som opfylder at $\emptyset = SAS^{-1}$ er en øvre trekantsmatrix.*

I beviset anvendes 6.38 på $T(x) = A \cdot x$ i $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$; det giver en øvre trekantsmatrix $\emptyset = [T]_{\mathcal{C}}$ for T mht. en passende valgt o.n.b. $\mathcal{C}$ for $\mathbb{C}^n$. Ved at læse $\mathcal{B}$ som den naturlige basis for $\mathbb{C}^n$, og A som $[T]_{\mathcal{B}}$, så giver (9) netop formlen $\emptyset = SAS^{-1}$.

Dernæst gennemgik vi resten af kapitel 6, inklusive side 187–189 om funktionaler (til gengæld intet om determinanter).

9. gang, onsdag den 24. oktober. Her vil vi påbegynde kapitel 7A+B i [SA] om *spektralsætningen*. Denne store hovedsætning udsiger, at en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ er *ortogonalt* diagonaliserbar hvis og kun hvis T er normal (dvs. $T^*T = TT^*$).

Koordinatskifte: Find matricen $A = [D]_{\mathcal{B}}$ for operatoren D givet ved differentiation i $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, idet $\mathcal{B} = (1, z, z^2)$ betegner den naturlige basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$. Find så matricen S, som skifter koordinater til basen $\mathcal{C} = (z^2, (z-1)^2, (z-2)^2)$. Bestem endelig matricen $B = [D]_{\mathcal{C}}$ via (9).

Bevis at for enhver inverterbar matrix S er sættet $(v_1, \dots, v_n)$ defineret ved (7) en basis. (*Vink:* Prøv at gange med en søjle af skalarer og sætte lig 0.)

Ortogonalitet: Antag at V er et indre produkt rum med o.n.b. $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$. Udled da færdige formler for $[u]_{\mathcal{E}}$ og $[T]_{\mathcal{E}}$ samt for skiftematricen S i (7) og (9) når $(w_1, \dots, w_n)$ også er en o.n.b.

Ortogonalt komplement: Diskuter i gruppen hvorfor formlen (6.52) er triviel. Afklar dernæst hvordan den ortogonale dekomponering i 6.47 giver den omvendte inklusion (nb: snurrigt!).

Regn så 6.C.1+3+4.

Ortogonal projektion: Regn 6.C.5 og 6.C.8.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 11

Idag gennemgik vi afsnit 7.A.

Bemærk at sætning 7.10 kan formuleres præcist som

$$M(T^*) = M(T)^*, \tag{10}$$

idet den *adjungerede* matrix $M(T)^*$ fås ved at transponere og konjugere $M(T)$.

Dette er dog kun rigtigt, når matricerne beregnes med hensyn til en *ortonormal* basis. Mere præcist, for enhver ortonormal basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ for V, så gælder for alle operatorer $T \in \mathcal{L}(V)$ med at $[T]_{\mathcal{E}} = (a_{i,j})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n}$ at

$$[T^*]_{\mathcal{E}} = [T]^*_{\mathcal{E}} \qquad = (\overline{a_{j,i}})_{i=1,\dots,n,\, j=1,\dots,n}.$$

Mere alment gælder det tilsvarende også for $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

10. gang, tirsdag den 31. oktober. Her gennemgår vi kapitel 7.B om den reelle og komplekse spektralsætning 7.24+29 samt *ortogonal* diagonalisering.

Opgaverne tages i emnerne:

Adjungeret operator: Lav først 7.A.1. Brug så definitionen af den adjungerede til at regne 7.A.2.

Selvadjungerede operatorer: Eftervis at $T^*T - TT^*$ er selvadjungeret for alle $T \in \mathcal{L}(V)$.

Hvilke af følgende matricer er selvadjungerede ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7-\mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} & 5 \\ 7 & 5 & 5+7\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -11 & 3+4\,\mathrm{i} & 5-6\,\mathrm{i} \\ -3-4\,\mathrm{i} & 7 & 8-9\,\mathrm{i} \\ 6\,\mathrm{i}+5 & 9\,\mathrm{i}+8 & -1 \end{pmatrix}$$

Analyser så om enhver operator $T \in \mathcal{L}(V)$ opfylder

$$T = R + \mathrm{i}\,S \quad \text{for passende valgte } R = R^*,\ S = S^*.$$

Normale operatorer: Hvilke af følgende matricer er normale ?

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \bar{\mathrm{i}} & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & \mathrm{i} & -5 \\ -7 & 5 & 7\,\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3+4\,\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 7 & -2\,\mathrm{i} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Lav ubetinget 7.B.15 også !

Ortogonal diagonalisering: Hvilke af de ovenstående matricer er ortogonalt diagonaliserbare ?

Ortogonal komplement: Regn 7.A.3. Fortsæt med 7.A.4, eventuelt 7.A.5.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 12

Forslag til besvarelse. På oversigt nr. 10 skulle man afklare om enhver operator T på et komplekst indre produkt rum V kan skrives på formen $T = R + \mathrm{i}\,S$ for passende valgte selv-adjungerede operatorer R og S på V.

Analyse: Formlen medfører at $T^* = (R + \mathrm{i}\,S)^* = R^* + \bar{\mathrm{i}}S^* = R - \mathrm{i}\,S$ pga. reglerne for adjungering. Ved addition ses så at $T + T^* = 2R$, mens subtraktion giver $T - T^* = 2\,\mathrm{i}\,S$. Eneste mulighed er altså $R = \frac{1}{2}(T+T^*)$ og $S = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(T-T^*)$.

Syntesen: Indfører vi R og S i $\mathcal{L}(V)$ ved formlerne ovenfor, så giver addition at $R + \mathrm{i}\,S = T$, og da regnereglerne for adjungering giver $R^* = R$ hhv. $S^* = S$ (verificer!), så har disse valg af R og S de ønskede egenskaber. (NB. I analogi med komplekse tal bruger man også notationen $T_{\mathrm{Re}} = \frac{1}{2}(T+T^*)$ og $T_{\mathrm{Im}} = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}(T-T^*)$.)

Sidste gang gennemgik vi (en eksamensopgave og) afsnit 7.B til og med 7.26. Vi fik formuleret og bevist Spektralsætningen 7.24. Den udsiger at $T \in \mathcal{L}(V)$ er normal (dvs. $T^*T = TT^*$), netop når T er *ortogonalt* diagonaliserbar (dvs. at V har en *ortonormal* basis af egenvektorer for T). For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ bruges også betegnelsen *unitært* diagonaliserbar.

Dog ender beviset for at (c) $\Longrightarrow$ (a) noget komprimeret i [SA]. Som sagt, så følger $T^*T = TT^*$ af at matrixtilordningen $T \mapsto M(T)$ er injektiv som afbildning $\mathcal{L}(V) \to \mathbb{C}^{n,n}$, hvilket er klart da den er en isomorfi (jvf. 3.60 i [Ax]).

11. gang, onsdag den 7. november. Her fortsættes med den reelle spektralsætning 7.29, som udsiger at på komplekse indre produkt rum er ortogonal diagonalisering ensbetydende med at operatoren T er selvadjungeret; $T^* = T$.

Desuden ser vi på isometrier i afsnit 7.C, idet vi dog vil erstatte det meste af et lidt uddybende notesæt (se min web-side) om unitære/ortogonal operatorer og matricer. Disse benyttes i praksis når man udfører en ortogonal diagonalisering.

Opgaverne bliver denne gang:

Selvadjungerede operatorer: Lav 7.A.7 (nem den ene vej, nem den anden vej). Siden 7.A.6 (tricky!).

Regn dernæst 7.A.8+9. Bemærk forskellen.

Spektralsætningen: Regn først 7.B.4. Lav dernæst 7.B.5.

Fortsæt med 7.B.6 og 7.B.7*.

Spektralfremstilling:** Bevis at enhver normal operator $T \in \mathcal{L}(V)$ med de indbyrdes forskellige egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ har en fremstilling

$$T = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_m P_m, \tag{11}$$

hvorved P_j betegner ortogonalprojektionen på egenrummet $E(\lambda_j, T)$. Bevis også at fremstillingen er entydigt bestemt pånær ombytning af leddene.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 13

2. selvstudium, den 12. november: Kvadratrødder af Positive Operatorer.

Temaet er, at I skal lære at "tage kvadratroden" af en positiv operator, og at spektralsætningen er et *meget* bekvemt hjælpemiddel hertil.

Allerførst: For en operator T på et indre produkt rum V af dimension $n \in \mathbb{N}$ siges $R \in \mathcal{L}(V)$ at være en *kvadratrod* af T dersom

$$R^* R = T. \tag{12}$$

I det simple tilfælde at $V = \mathbb{R}$ ved vi jo godt at $\sqrt{t}$ kun er defineret for $t \geq 0$. Derfor må vi også forvente at få brug for et positivitetsbegreb for operatoren T:

Definition 7.31. *En operator $T \in \mathcal{L}(V)$ kaldes* positiv *dersom $T^* = T$ og*

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0 \qquad \textit{for alle } v \in V. \tag{13}$$

I så fald skrives $T \geq 0$.

Dagens opgaver er følgende: [4]

(1) Lav først en analyse: Vis at hvis T har en kvadratrod R, som defineret i (12), så gælder nødvendigvis at $T^* = T$ og at $T \geq 0$; jvf. (13).

(2) Og så til syntesen: Når $V = \mathbb{C}^n$ og $Tv = Av$, hvor $A_{n,n}$ betegner T's matrix mht. den naturlige basis, så søger vi $R_{n,n}$ sådan at $R^* R = A$.

Begynd med tilfældet $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) =: D$ er en diagonalmatrix. Hvad skal der her gælde om tallene $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ for at $D^* = D$ og $D \geq 0$? Kan du for sådanne D bestemme $B_{n,n}$ sådan at $B^* B = D$?

Vis nu for almene A opfyldende $A^* = A$ og $A \geq 0$ at der eksisterer en kvadratrod af A, dvs. $R_{n,n}$ opfyldende $R^* R = A$. (*Vink:* Faktoriser A; husk at S i (9) kan vælges sådan at $S^* = S^{-1}$.)

(3) Og så det almene tilfælde: Læs beviset for 7.35 om at positivitet af T er ækvivalent med eksistens af en kvadratrod. NB: Det er klart at $R^* = R$ fordi $M(R) = \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$—men brug ortonormaliteten til at skrive ud i alle detaljer hvorfor $\langle Rv, v \rangle \geq 0$, så I får bevist at R er *positiv*.

(4) Læs 7.36 om at den positive kvadratrod i 7.35 (c) er entydigt bestemt, så den kan betegnes med $\sqrt{T}$. Indse, at $e^{\mathrm{i}\,\theta}\sqrt{T}$ også er en kvadratrod når $\theta \in \mathbb{R}$.

(5) Nedvarmning: Verificer at man for $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan nøjes med at skrive selve uligheden i Definition 7.31: Det følger da at $T^* = T$ (vha. polarisering).

Gennemregn 7.34 i [SA]. Eksemplet viser at $T \geq 0$ ikke er nødvendigt, når man mere naivt blot kræver at $R^2 = T$ (uden $*$) som i 7.33 i [SA]. Morale: Kvadratrødder bør defineres som i (12), hhv. ved (e) i 7.35.

Med venlig hilsen
Jon

[4] Ved problemer: Spørg i nabogruppen, eller evt. mig via mail, eller næste kursusgang 14/10.

Oversigt nr. 14

I dag fik vi bevist den reelle spektralsætning og set på eksemplet 7.30. Desuden fik vi diskuteret emnet isometrier fra 7.C, idet vi dog fulgte noterne [Un].

12. gang, onsdag den 14. november. Vi gennemgår først side 3–4 i [Un].

Dernæst ser vi på den såkaldte singulære værdi dekomposition (SVD) i afsnit 5 af notesættet [AJ]. Groft sagt giver SVD svaret på spørgsmålet:

Hvad gør man når matricen A ikke er diagonaliserbar ?

Dagens opgaver vedrører:

Unitære matricer: Vis at at $\det(U)\overline{\det(U)} = 1$ når $U_{n,n}$ er unitær (nem), sådan at $\det U = e^{\mathrm{i}\,\theta}$ for et $\theta \in \mathbb{R}$; specielt at $\det O = \pm 1$, hvis O er ortogonal.

Gennemsku at kravene for unitaritet, dvs. $U^*U = E = UU^*$, er ensbetydende med at søjlerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$—og med at rækkerne i U udgør en o.n.b. for $\mathbb{C}^n$. (Jvf. (II) $\Longleftrightarrow$ (III) $\Longleftrightarrow$ (IV) i noterne [Un].)

To matricer $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ kaldes *unitært* ækvivalente, dersom $B = UAU^*$ for en unitær matrix $U \in \mathbb{C}^{n,n}$. Vis at dette er en ækvivalensrelation (nem).

Positive operatorer: Undersøg om matricerne $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ giver positive operatorer på $\mathbb{C}^2$. (Nemme.)

Kvadratrødder: Bestem den positive kvadratrod $R = \sqrt{A}$ af matricen

$$\begin{pmatrix} 6 & 2+2\,\mathrm{i} \\ 2-2\,\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemærk at R pga. 7.35 skal have formen $U\operatorname{diag}(\sqrt{2}, \sqrt{8})U^*$ for at være *positiv*.

Facit: $\sqrt{A} = \frac{\sqrt{2}}{3}\begin{pmatrix} 5 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & 4 \end{pmatrix}$.

Ortogonal diagonalisering: Diskuter teoretisk om hver af de følgende matricer er unitært ækvivalent med en diagonalmatrix. Faktoriser i så fald A på formen $A = UDU^*$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3+\mathrm{i} \\ 3-\mathrm{i} & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1-\mathrm{i} \\ 0 & -1-\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 2 & 0 \\ \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}} & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tillægsspørgsmål: For hvilke af matricerne kan man slutte at egenrummene i 5.41 (d) står vinkelret på hinanden ? (Jvf. opgave 7.B.4.)

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 15

3. selvstudium: LU- og LDU-faktorisering af matricer.

Emnet er beskrevet i afsnit 2 af notesættet [AJ], som findes på kursets moodleside. Kort sagt skal I få at se, at når man laver rækkeoperationer (på en totalmatrix for et ligningssystem $Ax = b$), så bestemmer man implicit også en faktorisering af af koefficientmatricen som $A = LU$, hvorved L er en nedre trekantsmatrix, mens U er en øvre ditto.

Dette er ikke bare sjov: Det er også yderst nyttigt, når et ligningssystem skal løses (gentagne gange, som når man regner på differentialligninger) på en computer. Denne branche kaldes *numerisk* lineær algebra.

Har man i praksis brug for at løse lineære ligningssystemer i industriel skala, så anbefales det at bruge en af markedets *software pakker* (der har indbygget 50 års erfaringer med at undgå mulige fejl fra afrunding og andet).

Hensigten for dagens selvstudium er meget enkel: Læs, lær og løs !

Afsnit 2.1: Læs afsnittet og kontroller matrixprodukterne i (2.4), (2.6) og i linie lige under (2.7).

Afsnit 2.2: Læs afsnittet og kontroller matrixproduktet midt på side 6.

Indse at bemærkningen om “gathered” øverst side 6 ikke er helt korrekt. *Vink:* Se på tallet -4 i indgang 3,1.

Afsnit 2.3: Læs afsnittet og kontroller matrixprodukterne i Example 2.10.

Mere LU-faktorisering: Regn opgave 2.1 og 2.2.

Regn også 2.4 for at se hvordan rækkeombytninger fører til LU-faktorisering af den permuterede matrix PA; jvf. midten af side 8.

Lav også $PW3$, $PW5$ og $PW6$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 16

Sidste gang nåede vi at introducere SVD fra [AJ] sammen med en oversigt over matrixfaktoriseringer; og at vise de to første sætninger i afsnit 5.

13. gang, onsdag den 21. november. Vi gør her afsnit 5 i [AJ] færdigt. Hvis tiden tillader det, så tager vi også fat på afsnit 3 om Cholesky faktorisering af matricer (NB. Her får vi brug for LU-faktoriseringen).

Opgaverne:

Unitær: Vis at når matricen $U_{n,n} = [u_1 u_2 \dots u_n]$ er unitær, så gælder det samme om $\tilde{U} = [e^{\mathrm{i}\,\theta} u_1 u_2 \dots u_n]$. Er der et tilsvarende resultat for en ortogonal matrix $O = [o_1 \dots o_n]$?

Singulære værdier: Udled vha. sætning 5.8 at der for en operator $T \in \mathcal{L}(V)$ med singulære værdier $s_1, s_2, \dots, s_n$ gælder for alle $v \in V$ at

$$\|Tv\| \le (\max_j s_j)\|v\|.$$

Brug definitionen til at finde de singulære værdier for $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

SVD: Find både den reducerede og den fulde SVD for ovenstående matrix B. (NB. Pæne tal!)

Lad A være matricen for differentiationsoperatoren D på $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$ mht. basen $(1, z, z^2)$. Find så både den reducerede og den fulde SVD for A. Facit:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 fundamentale underrum: Beregn først de 4 matricer nævnt side 25–26 i [AJ] for den i opgave 5.2 givne matrix.

Regn 5.1PW. Godtgør dernæst påstanden om de 4 ortogonale projektioner nævnt side 25–26.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 17

Idag gennemgik vi resten af afsnit 5.1–5.5 i [AJ], dog uden at skrive sætning 5.11 og 5.13 op formelt set. Dette overlades til Selvstudium 4. Desuden så vi på en SVD-opgave i eksamensopgaven fra januar 2017.

Facit:. I opgaven med at udføre SVD på matricen B på oversigt nr. 16 finder man følgende reducerede SVD:

$$B = X\Sigma Y^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Her kan de første to søjler af X ombyttes, hvis man også ombytter de to første søjler af Y. (Ellers kan man ikke opretholde at $w_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j$.)

Pensum. Pensum udgøres af de læste dele af de tre notesæt:

- I [SA] er det Kapitel 1, 2, 3.A–3.D, 4, 5 (dog ej kvotient operator side 137), 6, 7.A–7.C, 10.A til og med side 298, og 10.B side 311–318.
- Supplerende notesæt [Un] om unitære operatorer og matricer af 7. november (på mit websted).
- Afsnit 1–8 i [AJ].

Dog er afsnit 10.B om permutationer og determinanter [SA] kursorisk (dvs. at man skal kende begreber og resultater derfra, men bliver ikke prøvet i betragtningerne (=beviserne) i afsnittet).

Desuden er afsnit 7 og 8 i [AJ] kursoriske.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 18

4. selvstudium, den 26. november: Reduceret og fuld SVD af matricer.

I dagens selvstudium skal I stifte nærmere bekendtskab med den reducerede SVD: $A = X\Sigma Y^*$. Ved at bruge de detaljerede oplysninger i Theorem 5.11 i [AJ] bør I kunne bestemme X, Y og Σ for konkrete matricer A.

Desuden er der den fulde SVD: $A = X_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}^*$, som er beskrevet i afsnit 5.4. Her skal man (modsat den reducerede SVD) yderligere inddrage ortonomale baser for A og A^*—det giver så flere indgange i matricerne, især en masse nuller i Σ_{f}.

Man kan nok godt have brug for en fremgangsmåde. Den kunne se sådan ud:

(i) Beregn A^*A (eller AA^*) og find egenværdierne med $\lambda_j > 0$; aflæs dernæst $r = \operatorname{rang} A$ som antallet af disse egenværdier.

(ii) Opskriv de singulære værdier $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$ for $\lambda_j > 0$ og sæt ind i diagonalmatricen $\Sigma_{r,r}$; suppler med 0-blokke til $\Sigma_{\mathrm{f}} \in \mathbb{R}^{m,n}$.

(iii) Bestem o.n.b. for V bestående af egenvektorer $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ for A^*A, sådan at $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0 = \cdots = 0$.

Indsæt i $Y = [v_1 \dots v_r]$; hhv. i $Y_{\mathrm{f}} = [v_1 \dots v_r \dots v_n]$.

(iv) Udregn $w_j = \frac{1}{\sigma_j}Av_j$ for $j \in \{1, \dots, r\}$ og indsæt i $X = [w_1 \dots w_r]$; suppler med o.n.b. for $\operatorname{null}(A^*)$ til X_{f}.

(v) Opskriv faktoriseringen $A = X\Sigma Y^*$, hhv. $A = X_{\mathrm{f}}\Sigma_{\mathrm{f}}Y_{\mathrm{f}}^*$.

Dagens opgaver. Mit forslag er at I regner følgende (spring evt. (1) over):

(1) Prøv først at bruge Theorem 5.11 og 5.13 til at regne detaljerne efter i Example 5.14. Altså: Hvor kommer matricerne fra i disse faktoriseringer ?

(2) Kontroller i Theorem 5.11 formlerne for Av_j, A^*w_j og A^*Av_j samt AA^*w_j.

(3) Regn opgave 5.1 (facit nedenfor!). Fortsæt evt. med opgave 5.2.

(4) Mindste kvadraters metode: Læs om hvordan SVD kan bruges her på side 28–29; navnlig de første 2 linier side 29.

(5) Læs mere om anvendelserne af SVD i billedkompression i afsnit 8 (fine billeder!) og om teorien bag i afsnit 7 af [AJ].

NB. Det ene facit i opgave 5.1 er **TUNGT**, nemlig

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \\ \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} & \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5+\sqrt{5})}} \\ \frac{2}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} & \frac{-\sqrt{5}-1}{\sqrt{2(5-\sqrt{5})}} \end{pmatrix}.$$

Bemærk at de to yderste er unitære, da de har ortonormale søjler hhv. rækker. Desuden er $X = Y$ fordi $A^*A = AA^*$ her.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 19

14. gang, onsdag den 28. november. Her gør vi først kapitel 5 i [AJ] helt færdigt ved at lære om *polar dekomponeringen* i Theorem 5.17. NB: Forudsætningen gjort i Theorem 5.17, om at matricen A skal være selvadjungeret, er *unødvendig!*

Dernæst gennemgås hovedpunkter fra afsnit 3 i [AJ]. Fokus vil ligge på positivt definitte matricer (jævnfør overskriften) og på indholdet i Proposition 3.7 og Theorem 3.11 om Cholesky faktorisering.

Desuden afsnit 3.3 om udregning af Cholesky faktorisering, hvor udgangspunktet er LDU-faktoriseringen i Proposition 2.7 (repeter denne!).

Som tiden tillader det, gennemregnes der også nogle eksempler på de gennemgåede matrixfaktoriseringer.

Vi ser også på følgende opgaver:

SVD: Regn opgave 5.2, hvis du ikke nåede den i 3. selvstudium. Ellers 5.3PW.

Polar dekomposition: Bestem polar dekompositionen $A = QS$ i Theorem 5.17 i [AJ] for matricerne A og B på oversigt nr. 16. (*Vink:* Udnyt at de fulde SVD-faktoriseringer allerede kendes; jvf. oversigt nr. 17 for B.)

Positivt definit: Løs først opgave 3.1PW.

Vis så, at for at $A_{m,m}$ har en Cholesky faktorisering (dvs. $A = R^*R$ for R positivt definit ØT-matrix), så er det en *nødvendig* betingelse, at A selv er positivt definit.

Regn også 3.1 og 3.3 som taleksempler.

Cholesky: Find Cholesky-faktoriseringen af matricen A fra Example 3.10. Facit står i Example 3.13—check om det er korrekt !

Godtgør at matricen $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ er positivt definit; bestem dernæst Cholesky-faktoriseringen af A. (Facit: $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$.)

Samme opgave med matricen $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

Med venlig hilsen
Jon