Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[BM] Mål- og integralteori, af Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Jeg regner med at vi gennemgår bogen i sin helhed, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold.

Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, nemlig integrationsteorien. Men det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mægde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen af Lebesgues integralbegreb at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \dots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette både naturligt og bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke er en delmængde af hverken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$).

På den anden side er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i 'praksis'.

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebegues integralbegreb, som I altså nu skal møde. Men mere om anvendelserne senere.

En tentativ lektionsplan findes på næste side.

Første gang er fredag den 3. februar. Vi mødes 8.15 i aud. G5-109, hvor jeg lægger ud med at gennemgå til og med kapitel 1 i [BM]. Siden får I tid til at regne opgaverne til kapitel 0; næste gang ser vi på dem til kapitel 1.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Uge	Dato	Seance	Emner
5	3/2	1	kapitel 0+1: Den udvidede reelle akse; summer.
			Målelige mængder; σ-algebra.
6	7/2	2	kapitel 2: Målelige afbildninger og mål.
	10/2	3	kapitel 3+4:“Næsten overalt”. Integral af
			positive målelige funktioner.
7	14/2	4	kapitel 4: Integral af reelle og komplekse funktioner.
			Integral med reel parameter.
9	28/2	5	kapitel 4: Majorantsætningen. Afledte målrum.
10	7/3	6	kapitel 5: Lebeguemålets entydighed. Lokal integrabilitet.
			Radonmål.
11	14/3	7	kapitel 5: Invarians. Målforhold. Transformationssætningen.
			Cantors mængde.
15	11/4	8	kapitel 5: Konstruktion af Lebesguemålet på aksen (appendix).
16	18/4	9	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
	20/4	10	kapitel 6: Anvendelser af Fubinis sætning.
17	25/4	11	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
	27/4	12	kapitel 7: L_∞. Tæthed af $C_c(\mathbb{R}^k)$ for $1 \leq p < \infty$.
18	2/5	13	kapitel 8: Fouriertransformationen og Schwartzrummet.
	2/5	14	kapitel 8: Foldning på $\mathbb{R}^k$.
	4/5	15	kapitel 8: Fourier-Plancherels transformation.

Ændringer kan naturligvis forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

2. gang, tirsdag den 7. februar. Her lægger vi ud med opgaveregning kl. 12.30-14.15.

Vi skal først have afklaret jeres eventuelle spørgsmål til:

- *hvis $\mathbb{E}_i$ er en σ-algebra i en mængde X for hvert $i \in I$, da er også $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ en σ-algebra i X.*

- Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  Noter at $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$; og at $\mathbb{D}$ kaldes et *frembringersystem* for denne algebra.

Så skulle I være klar til at regne opgaverne til kapitel 1.

Vedr. opgave 1.6, så skal man nok bruge at metrikken

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \tag{2}$$

giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Er der tid til overs regnes opgaver fra kapitel 0.

Kl. 14.30–16.15 fortsættes med gennemgang af kapitel 2 og måske lidt om mål fra kapitel 3.

3. gang, fredag den 10. februar. Her varmer I op med at vise at der, for en vilkårlig afbildning $f\colon X \to Y$ og delmængder af Y, gælder

$$f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j), \qquad f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j). \tag{3}$$

Gælder noget tilsvarende for billeder i stedet for urbilleder ?

Afklar hvorvidt polynomier $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\exp$ samt $\sin$ er *målelige*, dvs. Borelfunktioner. Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin konvergenscirkel, målelig ?

Dernæst kan I regne opgaverne 2.1–2.5. Endelig gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Fra 10.15 gennemgås resten af kapitel 3 og kapitel 4.1 om Lebesgues integralbegreb.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi fik idag gjort kapitel 2 og 3 færdige og gennemgik side 4.1-4.4.

Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet *nulmængder* er til for at holde regnskab med at ting “går galt” i kun “ubetydelige” mængder.

Det anbefales at gruble hjemmefra over eksempel 2.15. Resultatet herfra indgår i den følgende teori, og metoden bruges også i den første opgave.

Overvej hjemmefra bogens påstand side 4.1 at $f + g$ og cf er $\mathbb{E}$-målelige for alle $f, g \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$. Overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$ fire linier under formel (iv) side 4.3.

4. gang, tirsdag den 14. februar 2006. Som sædvanlig lægger vi ud med opgaver, denne gang i

målelighed: Opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Man kan søge inspiration i eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

Regn også 2.7. Hvor meget af opgave 1.6 følger heraf ?

mål: opgave 3.3+6+7.

aksiomerne: belyses gennem opgaverne 3.4+5+10.

næsten overalt: opgave 3.12+13+14.

fuldstændige mål: Bliver senere et hovedtema, så lav gerne opgave 3.15 nu.

Fra 10.15 fortsættes med gennemgang af kapitel 4. Vi stiler mod at nå mindst til side 4.15 plus afsnit 4.7; og gerne mere.

5. gang, tirsdag den 28. februar 2006. Her vil målet (ha, ha!) være at gøre kapitel 4 færdigt og at begynde på kapitel 5; jævnfør lektionsplanen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 4 frem til en formulering af Lebesgues majorantsætning.

Dog bedes I selv læse om integrabilitet mm. for *komplekse* funktioner. Både definitionen og beviserne udnytter at man først har ordnet tilfældet med reelle funktioner; dette lader sig så anvende på real- og imaginærdelene hver for sig.

Selvom der også for $f\colon X \to \mathbb{C}$ gælder at f er Lebesgueintegrabel hvis og kun hvis $|f|$ er det, så er der dog behov for en særskilt bevisteknik for uligheden

$$|\int_X f\,d\mu| \le \int_X |f|\,d\mu. \tag{4}$$

Spørg næste gang hvis argumentet er uklart !

Til næste gang bedes I også afklare hjemmefra, om der er uklarheder ifm. Fatous lemma.

5. gang, tirsdag den 28. februar. Vi lægger ud med opgaver i

faldgruber: Opgave 4.3.

monotonisætningen: Regn 4.4.

almen træning: 4.6–9.

modeksempler: Lav opgave 4.11 og 4.12.

Dernæst gamle opgaver, især hvis I ikke nåede ret mange fra kapitel 3.

Fra klokken 10.15 fortsætter vi med resten af kapitel 4 (visse dele er ret ligetil) og starten af kapitel 5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Sidste gang fik vi afsluttet gennemgangen af kapitel 4. Dog blev mål med tætheder overladt til jeg selv at læse. Ligeledes standardeksemplet med definition og behandling af summer via integration mht. tællemålet

$$\sum_{j\in J} a_j = \int_J a_j \, d\mu. \tag{5}$$

Bemærk at man skriver $\ell(J)$ i stedet for $\mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathbb{P}(\mathcal{J}), \mu)$; og at man for $J = \mathbb{N}$ har *følgerummet* $\ell = \ell(N)$, som består af alle absolut konvergente talfølger. (Hvorfor?)

6. gang, tirsdag den 7. marts. Vi lægger ud med opgaven 4.41 for at belyse hvordan de gennemgåede sætninger kan anvendes i analyse.

Desuden opgaverne 4.14+19+23+28+29+30+38+39.

Klokken 14.30 gennemgås kapitel 5.1 og udvalgte dele af 5.2–3.

7. gang, tirsdag den 14. marts. Vi fortsætter her med gennemgangen af kapitel 5; antageligt når vi til og med 5.7.

For at øve tingene regnes opgaver i

Billedmål: 4.35.

Anvendelse: 4.42 om gammafunktionen (en 'glat' udgave af $n!$).

Lokalt integrable funktioner: 5.8+9+10 (bruges ofte).

σ**-klasser:** 5.6+7.

Eventuelt gamle opgaver.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 5.4–6.

Her er et bekvemt argument for at *enhver* isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda af formen $T(x) = T(0) + Ox$ for en ortogonal matrix O: Givet at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{6}$$

så kan vi antage $T(0) = 0$, fordi $T - T(0)$ også er en isometri. Vi ser så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \mid x \,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \mid y \,) \tag{7}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$, og y med $T(y)$, uden at ændre værdien, fås

$$(\, T(x) \mid T(y) \,) = (\, x \mid y \,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

T er derfor skalarproduktbevarende, og for den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ gælder så at $(\, T(e_j) \mid T(e_k) \,) = \delta_{jk}$, hvorfor $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Af opskrivningen $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ følger så ved at tage indre produkt med $T(e_k)$ at $\lambda_k = (\, T(x) \mid T(e_k) \,)$, og derfor er

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \mid T(e_j) \,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \mid e_j \,) T(e_j). \tag{9}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, følgelig er $T(x) = Ox$ for en $n \times n$-matrix O. Nu medfører (8) at $O^{\mathrm{t}} O = I$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

8. gang, tirsdag den 11. april. I opgavetiden kan I begynde med 4.38.

Dernæst kan I forstsætte med 5.8–5.10 (hvis I ikke allerede har lavet dem), siden 5.14+15. Desuden 5.16 og 5.18.

Vi vil bruge denne gang på at afslutte kapitel 5 inklusive et bevis for eksistensen af Lebesguemålet. I bogens appendix er der et eksistensbevis for $k = 1$, som vi vil gennemgå. Det vil nok være en fordel, om I prøver hjemmefra at tilegne jer begrebet *ydre mål* fra definition 1 og 2 i appendikset.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

9. gang, tirsdag den 18. april. Til dagens øvelser beskæftiger vi os med følgende emner:

- Eftervis påstandene i appendiksets lemma 5 og 6.

  Dermed er konstruktionen af Lebesguemålet på $\mathbb{R}$ fuldbragt. Analoge overvejelesr giver faktisk også Lebesguemålet m_k på en vis σ-algebra $\mathbb{L}_k \supset \mathbb{B}_k$ i $\mathbb{R}^k$. Her udgår man fra det ydre mål

  $$m_k^*(A) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{\infty} v_k(I_n) \;\Big|\; A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n, \quad \forall n\colon I_n \in \mathbb{I}_k \Big\}. \tag{10}$$

  Appendiksets lemma 8–12 kan vises på analog måde, hvilket vi vil bruge uden nærmere forklaring (tilfældet $k = 1$ giver kun en forenklet notation, hvad I selv kan prøve efter. Jvf. også opgave 5.1–5.5)

- Brug definitionen af m_k^* til at vise, at der for ethvert $A \in \mathbb{L}_k$ eksisterer $B \in \mathbb{B}_k$ og en Lebesguenulmængde N sådan at

  $$A \cup N = B \qquad \text{og} \qquad m_k(A) = m_k(B). \tag{11}$$

  Brug dette til at give et bevis for bogens sætning 5.29 (kun mindre ændringer er nødvendige).

- Sætning 5.29 er *uhyre* bekvem i arbejdet med Lebesgueintegralet — overvej hvorfor !! (Se også bemærkningen 4 linier før sætning 5.29, om at man ligeså godt kan nøjes med at integrere mht. Lebesguemålet på $\mathbb{B}_k$.)

- Transformationssætningen (5.26): Regn 5.24.

- For hvilke $a > 0$ er funktionen $\frac{1}{x(\log x)^a}$ (hvor $x > 2$) integrabel i ∞ ? *Vink:* En stamfunktion kan opskrives ! Bemærk dog at $a = 1$ er et særtilfælde, med en 'anderledes' stamfunktion. Dernæst skulle 5.10 3° være ligetil.

Man kan også regne opgaverne 5.28–31. De er af den slags, der virkelig flytter grænserne for det man ville tro er muligt (eller de belyser hvordan ens intuition kan spille en et puds).

Vi gennemgår idag kapitel 6 til og med Tonelli og Fubinis sætninger. Disse omhandler integration over produktmængder, så vi må dog først diskutere emnet *produktmål*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Det bør nok bemærkes, at vi overspringer definition 5.27 og sætning 5.28; disse ting er skrevet til oplysning, for dem der ikke har været igennem konstruktionen af Lebesguemålet (og selvom vi har læst appendikset, kræver det alligevel lidt mere analyse at nå konklusionerne i sætning 5.28).

Derimod er sætning 5.29 bekvem, som vi talte om sidste gang. Bemærk at vi fik den bevist under opgaveregningen, ved at bruge konstruktionen via ydre mål i appendikset.

Afsnit 5.9 kan læses af de interesserede. Blandt andet godtgør overførslen af Lebesguemålet til et vilkårligt euklidisk rum (som jo kunne være $\mathbb{R}^k$ med en anden ortonormal basis end den kanoniske) at Lebesguemålet m_k i $\mathbb{R}^k$ *ikke* er knyttet til koordinatakserne, som man måske kunne tro fordi v_k er det.

10.gang, torsdag den 20. april. Som opvarmning regnes 5.23; *vink:* find en metode til at få sætningen om målforholdet i spil.

Dernæst kan I lave (6.2 og) 6.3 for at få træning i produkt-σ-algebraer. Lav også 6.5 2° (ej svær, omend eksistensen af en mængde $A \notin \mathbb{L}_1$ kræver brug af udvalgsaksiomet; dette kan I læse om i sætning 5.30).

Regn resten af 5.28–31. Fortsæt med 5.32.

Er der tid til overs regnes 5.25 om eksistensen af ikke-Lebesuemålelige mængder, jævnfør sætning 5.30.

Fra kl. 10.15 gennemgår vi resten af kapitel 6 med bevis for Tonelli og Fubinis sætninger, og visse anvendelser.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

11. gang, tirsdag den 25. april. Som øvelser kan I først løse opgave 6.10.

Desuden 6.14 og 6.27 (som begge gør rede for nogle (kendte) geometriske ting).

Endelig kan I regne 6.20 for at træne brugen af Fubinis sætning. Lav også 6.19.

Fra klokken 14.30 gennemgås kapitel 7 om funktionsrummene $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ for $1 \leq p < \infty$.

12. gang, torsdag den 27. april. Vi begynder med at eftervise formlen for delvis integration: Hvis f og g er to Borel funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er integrable på $[a, b]$, da gælder om vilkårlige stamfunktioner $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ og $G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \tag{12}$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x, y) hvor $a \leq x \leq b$ og $a \leq y \leq x$.

Regn dernæst 6.28, 6.26, 6.22 og 6.23.

Fra 10.15 gennemgås resten af kapitel 7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi fik sidste gang gennemgået resten af kapitel 7. Som et hovedpunkt har vi set at man ved ækvivalensrelationen $f \sim g \iff f(x) = g(x)$ n.o. på vilkårlige målrum opnår en skare af fuldstændige normerede vektorrum $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$, $1 \le p \le \infty$, såkaldte Banachrum.

I dette indgik som hovedresultater både Hölders og Minkowskis uligheder:

$$\int_X |fg|\,d\mu \le \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}\Big(\int_X |g|^q\,d\mu\Big)^{1/q}, \qquad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q}; \tag{13}$$

$$\Big(\int_X |f+g|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \le \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p} + \Big(\int_X |g|^p\,d\mu\Big)^{1/p} \tag{14}$$

Bemærk at disse også kan vises alment for positive målelige funktioner (hvorved $|\cdot|$ er overflødigt); jævnfør opgave 7.6 og 7.8.

I forbindelse med tætheden af $C_c(\mathbb{R}^k)$ i $L_p(\mathbb{R}^k, \mathbb{B}_k, \mu)$, hvorved $1 \le p < \infty$ og $\mu\colon \mathbb{B}_k \to [0, \infty]$ er et vilkårligt Radonmål på $\mathbb{R}^k$, f.eks. Lebesguemålet, har vi benyttet det resultat om Radonmål at

$$\mu(B) = \sup\big\{\, \mu(K) \;\big|\; K \subset B,\ K \text{ kompakt} \,\big\} \qquad \forall B \in \mathbb{B}_k. \tag{15}$$

Dette eftervises til øvelserne, se nedenfor.

13. gang, tirsdag den 2. maj. For at vise (15) kan I lave opgave 5.17 3° efter følgende slagplan: Indse først at det rækker at vise anden del af 2°. Vedr. 2° reduceres sagen til opgave 5.16 2°. Denne sidste ting eftervises vha. 5.16 1° og vinket der.

Ifm. funktionsrummene kan I lave 7.3, 7.4 og 7.16.

Følgerummene illustreres fint gennem 7.13 og 7.14.

Fra 14.30 gennemgår vi ca. side 8.1–8. Her skal vi se på en af Lebesgueintegralets hovedanvendelser: Dels skal vi til en funktion knytte dens Fouriertransformerede funktion

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{-x\cdot\xi} f(x)\,dx, \tag{16}$$

dels skal vi se på hvorvidt man kan gendanne f når $\mathcal{F}f$ er kendt (inversionsformlen giver at $\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(x) = f(-x)(2\pi)^k$. En afklaring af disse ting — og dernæst den ramme der har frembragt afklaringen — har været en hovedingrediens i det 20. århundredes matematiske analyse (og fysik).

14. gang, onsdag den 2. maj, kl. 8.15–12.00. Her kan I regne opgaverne 7.19, 7.20 om rummet L_∞. Dernæst 8.1–4 om Fouriertransformationen.

Fra 10.15 gennemgås frem til side 8.13 ca.

15. gang, torsdag 3. maj. Her gennemgår vi fra kl. 8.15 resten af kapitel 8 om Fouriertransformationen. Bagefter ser vi på de resterende opgaver til kapitel 8.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Pensum og eksamen.

Pensum er det gennemgåede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen "Mål- og integralteori". Dog er afsnittene 5.9, 6.5 og appendikset kursoriske.

Til den mundtlige eksamen kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(2) Entydighedssætningen for mål.

(3) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(4) Produktmål.

(5) Tonellis og Fubinis sætninger.

(6) Hölders og Minkowskis uligheder.

(7) Lebesguerummene og deres fuldstændighed.

(8) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(9) Parsevals ligning.

(10) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

Man forventes selv at tale ca. 25 minutter om det trukne emne. Som bekendt er der 30 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Spørgsmål fra jeres side kan stilles tirsdag den 30/5, klokken 12.30. Lokale meddeles senere.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen