Oversigt nr. 1

I kurset i skal vi bruge

> D. C. Lay: "Linear algebra and its applications", Third Edition Update, Addison–Wesley;

man kan også anvende Third Edition (men ej anden udgave).

I store træk kommer vi til at gennemgå kapitel 1–3 og 5.1–5.3. Som regel vil hver seance omhandle circa et/to afsnit i bogen.

Desuden kan det anbefales at man bruger følgende

> "Kompendium i lineær algebra, Definitioner, formler og eksempler" af Henrik Vie Christensen og Bo Rosbjerg.

Eksamen i kurset er skriftlig og baseret på computersystemet MapleTA (som ikke er det samme som 'regnemaskinen' Maple). Vi vil træne brugen af MapleTA i hele kurset; systemet bruges til automatisk rettelse af opgaver.

Hovedsiden med informationer om MapleTA findes her:
`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/mapleta/index.html`

Selvom informationssiderne er på engelsk, så vil opgaverne gradvist blive på dansk; eksamensopgaverne formuleres alle på dansk.

1.gang, tirsdag den 6. februar 2007.

kl. 12.30–13.15 i auditorium 4: Efter en introduktion til kurset vil jeg forelæse over "lineære ligninger" (afsnit 1.1) og temaet bliver *hvad, hvorfor og hvordan*.

Som I vil få at se er der en meget systematisk og overskuelig måde at løse lineære ligninger på, også hvis der skulle ske at være 5 ligninger og 6 ubekendte. Selve løsningsmetoden vil vi bruge en del kræfter på at *indøve* og *forstå*, for den bliver central for os i hele kurset. Om kort tid vil det derfor være en overkommelig opgave for jer at løse 7 ligninger med 7 ubekendte (tro det om I kan..). I kan læse om det i afsnit 1.1.

Kl. 13.15–15.15 For at få en blid start, og for at stifte nærmere bekendtskab med bogen (og især de store anstrengelser Lay gør sig for at I kan få et godt udbytte), laver vi følgende opgaver:

- "Practice problems 1–4" side 10. Disse kan løses på grundlag af forelæsningen alene, men er ment som *træningsopgaver* efter man har læst afsnittet — løs "Practice problems" hver gang et afsnit er læst/gennemgået !
- **Sandt/falsk-opgave**: Diskuter opgave 23 side 12 i gruppen, men husk at *begrunde* jeres svar, som teksten før opgave 23 kræver !
- Som en simpel afprøving af MapleTA kan I løse det første opgavesæt på

  `http://vmlinux1.tnb.aau.dk:8080/classes/Mat2A-Hold6/`

- **AHA-opgaven**: Løs ligningssystemet i eksempel 1 side 5 på følgende måde: Først isoleres x_1 i 1. ligning og substitueres i 3. ligning. Dernæst isoleres x_2 i 2. ligning og indsættes i den nye 3. ligning (men ej i nr. 1). Derved er x_3 blevet bestemt; der bør jævnføres med midten af side 6 i bogen. Resultatet substitueres i ligning 1 og 2. Fortsæt indtil også x_1 og x_2 er bestemt.

  Ved at sammenligne med bogens gennemgang skulle to ting nu gerne stå klart: **Dels** optræder alle mellemfacitter i substitutionsmetoden også ved at bruge bogens metode (de to metoder er altså to sider af den samme sag), **dels** er bogens fremgangsmåde *langt* mere overskuelig.

Kl.15.30–16.15 Her gennemgås resten af afsnit 1.1 og 1.2 til og med echelon-matricer og pivotpositioner.

Hjemmeforberedelse: Lær mere om MapleTA ved at læse vejledningen på det første link ovenfor. Husk at oprette de to URL-er som bogmærker i jeres net-browsere !

Læs afsnit 1.1 og det gennemgåede i 1.2 i Lay. Og lav resten af opgaverne ovenfor.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Fra latinskolen: Det hedder en matrix, matricen og flere matricer. (Og selv når man så har bøjet dem, så kan det aldrig blive til en “matrice” i ental.)

2. gang, tirsdag den 13. februar.

- **12.30–13.15:** Her gennemgås resten af afsnit 1.1.2 om hvad rækkeoperationer i almindelighed kan føre til. Som vi skal se får man i almindelighed en *parametrisk beskrivelse* af løsningsmængden til et lineært system.

- **13.15–15.15:** Vi laver opgaver i:

  Sandt eller falsk: Regn 1.1.24 (husk at læse indledningen foran 1.1.23). Dernæst laves samme opgave i Maple TA under **kursusgang2t**. Prøv gerne flere gange.

  Rækkeoperationer: For at træne dette laves 1.1.5+7+11+13. NB ! Gå systematisk til værks !

  Konsistens: Regn 1.1.15+17+18. Hvad vil Lay opnå med ordren “do not completely solve the systems.” ??

  Anvendelser: Lav 1.1.33+34.

  Maple-øvelser: Prøv opgaverne i **kursusgang2p**. (‘p’ står for practice her, modsat ‘t’ som antyder at opgaverne er teoretiske.)

- **15.30–16.15:** Her gennemgås kapitel 1.3 om vektorer. Læs hjemmefra det velkendte om $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, så vi fælles kan se på det nye i $\mathbb{R}^n$ — det skal vi bruge til ligningssystemer med uendeligt mange løsninger.

Vedrørende MapleTA: Når I har prøvet **kursusgang2t+2p** tilstrækkeligt mange gange, så bedes I logge på og lave hjemmearbejdsudgaven (homework) kaldet **kursusgang2t-hw** og **kursusgang2p-hw**.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Vi fik sidste gang gennemgået afsnit 1.3, men nåede dog ikke definitionen af $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_p)$. Dette er blot en notation for *samtlige* linear kombinationer af vektorerne $v_1, \dots, v_p$. Læs det selv hjemme.

Regn øvelsesopgaverne 'practice problems' til afsnit 1.2 og 1.3 hjemmefra. Gør et oprigtigt forsøg, før du ser løsningsforslaget i bogen !

3. gang, NB ! **den 27. februar.**

- **12.30–13.15:** Her gennemgås kort resten af afsnit 1.3 og dernæst 1.4 frem og med til Theorem 4.
- **13.15–15.15:** Opgaveregning i følgende (de er mange, men ej tekniske):

  Echelonform: Regn 1.2.2.

  Konsistens: Lav 1.2.15+16+17+23+24; disse kræver meget få udregninger.

  Parametriserede løsningsmængder: Lav 1.2.9+11+13.

  Linear kombinationer: 1.3.11.

  Frembringelse: 1.3.18. Og opgave 1.3.25 er rigtig god !!

  Anvendelser: *Interpolation* er en almindeligt brugt videnskabelig metode, I givetvis vil møde senere; her giver den lidt træning i lineære ligninger via opgave 1.2.33. Fortsæt gerne med 1.2.34.

  Sandt/falsk: Lav først opgaverne 1.2.21+22 og 1.3.23+24 som teoriopgaver. Gå dernæst til MapleTA, hvor **kursusgang3t** hver gang stiller to nye opgaver fra hvert afsnit. Lav **kursusgang3t-hw**, når du er fortrolig med opgaverne.

- **15.30–16.15:** Her gennemgås resten af kapitel 1.4 og 1.5 samt lidt af 1.7.

Vedr. **MapleTA-øveopgaver**: Der ligger en opgave som **kursusgang3p** og **kursusgang3p-hw**. Den tester evnen til at regne med vektorer og er en basal træningsopgave. Primært beregnet til træning udenfor undervisningstiden, for dem der har behov for det. Brug lommeregner til udregningerne, om nødvendigt. Opgaven tester både evnen til at regne helt rigtigt, og evnen til at få resultatet rigtigt ind i MapleTA. Bliv ved, indtil alle svarene er korrekte.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Som forberedelse bedes I læse afsnit 1.4 og regne de tilhørende 'praktikproblemer' og 1.4.23.

Desuden bør I repetere begrebet *injektivitet* (og surjektivitet) fra oversigt nr. 2 i Mat1A. Det får vi brug for til følgende resultat:

Sætning. Lad A være en $k \times n$-matrix. Da er følgende egenskaber ækvivalente:

(0) $x \mapsto Ax$ er en injektiv afbilding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(1) Ligningen $Ax = 0$ har kun den trivielle løsning $x = 0$.

(2) Ligningen $Ax = 0$ har ingen frie variable.

(3) A's søjler er lineært uafhængige i $\mathbb{R}^k$.

(4) A har en pivotposition i hver søjle.

Bemærk i hvor grad sætningen er analog til Theorem 4 i afsnit 1.4, når man dér indsætter: (0) $x \mapsto Ax$ er surjektiv $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$. (Jævnfør sidste gang.)

Ovenfor er det jo blot injektiv i st.f. surjektiv; entydighed af løsning i st.f. eksistens; søjler der er lineært uafhængige i st.f. at frembinge $\mathbb{R}^n$; og pivotpositioner i hver *søjle* i st.f. række.

4. gang, tirsdag den 6. marts.

- **12.30–13.15:** Gennemgang af afsnit 1.5 om homogene ligningssystemer og ovennævnte sætning (der ikke står direkte i bogen).
- **13.15–15.15:** Opgaveregningens menukort af lettere anretninger (begrebstræning snarere end regnetræning):

  Vektorer i $\mathbb{R}^n$ 1.3.7+9. Diskuter i gruppen !

  Matrixprodukt 1.4.1–4.

  Matrixligning 1.4.9+10.

  Frembringelse 1.4.17–20 og desuden 1.4.20+21.

  Konsistens *uden* rækkeoperationer: 1.4.31+32.

  Homogene systemer 1.5.9+11.

  Sandt/falsk: Lav først opgaverne 1.4.23+24 som teoriopgaver. Gå dernæst til MapleTA og lav **kursusgang4t**. Besvar **kursusgang4t-hw** hjemme, når du er fortrolig med opgaverne.

- **15.30–16.15:** Her forsætter vi med *lineær uafhængighed* i resten af afsnit 1.7; dette begreb bliver meget centralt i kurset.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

For en oversttelse af begreberne til dansk henvises til Arne Jensens liste på

`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/term.html`

Desuden har Arne Jensen lavet en oversigt over opgaver i MapleTA:

`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/mapleta/indhold.html`

5. gang, tirsdag den 13. marts. Som forberedelse til denne seance bør I læse afsnit 1.6+7 og lave 'practice problems' til afsnit 1.7 og 1.7.21. (NB ! Opgaverne illustrerer mange mulige fejlslutninger i forbindelse med lineær uafhængighed.)

- **12.30–13.15:** Her gør vi kapitel 1.7 om lineær uafhængighed færdigt.
- **13.15–15.15:** Til opgaveregningen:

  Parametrisk vektorform: Regn 1.5.7+13+17.

  Homogene systemer: Lav **homogenligning1** i MapleTA.

  Inhomogene sys. 1.5.29–32. Diskuter vha. Sætning 1.5.4 og sætningen på oversigt nr. 5 !

  Lineær (u)afhængighed 1.7.1–4 som simpel træning; de kan *diskuteres* i gruppen. *Regn* dernæst 1.7.5+7.

  Regn så 1.7.9, og overvej hvorfor (a) og (b) ikke kommer ud på det samme!

  God forståelse (som ofte kan spare mange regninger!) kan fås af opgave 1.7.31–32.

  Endelig er der 1.7.33–40. (De er små og sjove...)

  Den "samfundsvidenskabelige" 1.6.14 (som også er sjov..).

  Sandt/falsk Lav først 1.5.23+24. Gå derefter til MapleTA og besvar **kursusgang5t**.

- **15.30–16.15:** Her gennemgår vi kapitel 1.8-1.9. Dele af det bør være velkendt (definitions- og dispositionsmængde, injektiv og surjektiv). Men der er mange eksempler på lineære afbildninger.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

For at opsummere, så har vi nu vist følgende to resultater:
Hovedsætning 1. For en $k \times n$-matrix A er følgende egenskaber ækvivalente:

(0) $x \mapsto Ax$ er en injektiv afbilding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(1) Ligningen $Ax = 0$ har kun den trivielle løsning $x = 0$.

(2) Ligningen $Ax = 0$ har ingen frie variable.

(3) A's søjler er lineært uafhængige i $\mathbb{R}^k$.

(4) A har en pivotposition i hver søjle.

Hovedsætning 2. For en $k \times n$-matrix A er følgende egenskaber ækvivalente:

(0) $x \mapsto Ax$ er en surjektiv afbilding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(1) For ethvert $b \in \mathbb{R}^k$ har ligningen $Ax = b$ mindst en løsning $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ethvert $b \in \mathbb{R}^k$ er en linearkombination af A's søjler.

(3) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^k$

(4) A har en pivotposition i hver række.

Bemærkning: 1° For et lineært system $A_{k,n}x = b$ kan der iflg. Sætning 1 ikke være entydighed af løsningerne for $k < n$ ('bred' matrix). Derfor siges $Ax = b$ i så fald at være et *underbestemt* ligningssystem.

2° For et lineært system $A_{k,n}x = b$ kan der iflg. Sætning 2 ikke eksistere løsninger uafhængigt af b hvis $k > n$ ('smal' matrix). I så fald siges $Ax = b$ at være et *overbestemt* ligningssystem.

3° For entydighed af løsninger til $A_{k,n}x = b$ er $k \geq n$ altså *nødvendigt*. For eksistens af løsninger for alle $b \in \mathbb{R}^k$ er $k \leq n$ en *nødvendig* betingelse.

4° For vilkårlig lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ har man de samme resultater om ligningen $T(x) = b$, idet man blot kan introducere T's standardmatrix $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{pmatrix}$, som jo opfylder at $T(x) = A \cdot x$.

Tilsvarende kan injektivitet/surjektivitet for T diskuteres direkte vha. sætningerne.

6. gang, tirsdag den 20. marts.

- **12.30–13.15:** Vi repeterer lidt om lineære transformationer i kapitel 1.8–9 og sætning 10 om *standardmatricen* for en lineær transformation. Vi fokuserer på anvendelserne i eksempel 3 og tabel 1–4. Bemærk at sætning 11+12 om injektive og surjektive lineære tranformationer faktisk er indeholdt i hovedsætningerne ovenfor.

- **13.15–15.15:** I det nye stof ses på en bunke opgaver (mange er ganske ligetil):

  Lineær (u)afhængighed: 1.7.21+22 diskuteres i gruppen og besvares i MapleTA som **kursusgang6t** (hjemme laves **kursusgang6t-hw**).

  Linearitet: Regn opgaverne 1.8.29+30+32+33+36.

  Standardmatricer: Lav opgave 1.9.17-20.

  Forbindelsen til pivotsøjler: Regn opgaverne 1.9.31+32.

  Forbindelsen mellem $m \times n$ og injektiv/surjektiv: Regn 1.9.35.

  Linearitet ved sammensætning: Bevis følgende sætning:
  Når $S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ og $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ begge er lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $T \circ S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ lineær.
  Vink: se opgave 1.9.36.

- **15.30–16.15:** Vi gennemgår anvendelserne af lineære transformationer i afsnit 1.10.

  Desuden når vi nok lidt af afsnit 2.1 om regneregler for matricer. Som vi skal se er det ganske ligetil at danne summen $A+B$ af to matricer af samme størrelse, og at multiplicere dem med et tal, tA.

7. gang, tirsdag den 22. marts.

- **12.30–13.15:** Her vil vi fortsætte gennemgangen af kapitel 1.10, denne gang om differensligninger. Dernæst færdiggør vi kapitel 2.1 om *matrixregning*, især skal vi lære om produktet af matricer.

- **13.15–15.15:**

  Injektivitet: Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$ og betragt den lineære afbildning givet ved $x \mapsto A \cdot x$, Er denne injektiv ? Bestem også A's nulrum, dvs. $\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot x = 0 \,\}$.
  Er afbildningen surjektiv ?

  Standardmatricer: Lav 1.9.1–7 og 1.9.19+22 (alle er ret ligetil).

  Anvendelser: Opgaverne 1.10.1+7 (søg inspiration i afsnit 1.10).

  Matrixregning: Opgave 2.1.1+2.

  MapleTA: Regn **lindep1** om lineær uafh;ngighed og **lintransf1** om lineære transformationer.

  Endelig laves gamle opgaver hvis der er tid til overs.

- **15.30–16.15:** Her vil vi begynde på kapitel 2.2 om inverse matricer A^{-1}. (Disse skal man nok se som pendent til det reciprokke a^{-1} af et tal $a \neq 0$.)

NB! Man opfordres kraftigt til hjemme at regne opgave 1 blandt Lays supplerende opgaver til kapitel 1. Derved repeteres hele teorien i kapitlet. Man kan så fortsætte med **chap1review**, som giver et nyt udpluk på 8 af disse opgaver hver gang. Så regn den bare 5–6 gange!

Man kan også teste sig selv ved at regne **chap1teori**, som giver et udpluk af alle de tidligere teoriopgaver til kapitel 1. Test jer selv om I har forstået det hele — det ville jo være skønt at få fod på de grundlæggende dele af kurset nu 3 måneder før eksamen (i st.f. 3 dage før).

Så bliver kurset også nemmere at følge fremover... Brug faciliteterne !!

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi så sidste gang hvordan man kan løse matrix liginger af formen $AX = B$, hvor $X_{n,p}$ er den ubekendte mens $A_{k,n}$ og $B_{k,p}$ er givne matricer.

Som eksempel løste vi

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Metoden var at udføre rækkeoperationer på totalmatricen $\left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 & 14 & 3 \\ 3 & -2 & -2 & 6 \end{smallmatrix}\right)$, som nu blot har en søjle mere end tidligere.

Regn som forberedelse 2.1.15+16 (pånær det om transponering).

8. gang, tirsdag den 10. april.

- **12.30–13.15:** Vi runder kapitel 2.1 af med at gennemgå transponering af matricer. Dernæst tager vi hul på kapitel 2.2 om inverse matricer, A^{-1}.

- **13.15–15.15:** I grupperne kan I regne:

  Matrixprodukt: Lav 2.1.5+7+13 og **matrixmult1** i MapleTA. Dernæst 2.1.12.

  Abnormiteter: 2.1.9.

  Regneregler: Lav 2.1.29–32.

  Anvendelser: Opgaverne 1.10.11.

  Linearitet: Lav 1.9.17+20.

- **15.30–16.15:** Vi gennemgår resten af afsnit 2.2 og 2.3 om *inversen* A^{-1} til en matrix A: Dels skal vi se på hvad dette begreb overhovedet er (groft sagt er det A's reciprokke matrix); dels skal vi se hvordan man finder A^{-1} i praksis, når A^{-1} eksisterer.

NB ! I opfordres kraftigt til at bruge tid på opgaverne

- **lindep1** og **lindep1-hw**, de er lidt sværere end de fleste.

- **lintransf1** og **lintransf1-hw**; forstå dem! det må ikke bare være 'mønstergenkendelse'.

- **matrixmult1** og **matrixmult1-hw**; bliv ved til række-søjle-reglen nærmest følges som en refleks.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Reflektion: Vi har nu været gennem de 8 af kursets 15 seancer, altså over halvdelen. Men vi mangler stadig at møde over halvdelen af de nye begreber, kurset byder på (!!). Det er derfor nu, kurset bliver svært.

En god ide er, at man med papir og blyant (og lukket bog) for repetitionens skyld holder foredrag for sig selv om:

> linearkombinationer, lineær uafhængighed, spændet af k vektorer, frembringelse af $\mathbb{R}^n$, lineær transformation, standardmatricer, produkt af matrix og vektor, produkt af to matricer; invers matrix.

9. gang, torsdag den 19. april.

- **12.30–13.15:** Her gennemgår vi resten af kapitel 2.2 om inverterbare matricer — vi skal se at rækkeoperationer kan udføres ved at gange med *elementarmatricer* og at A derfor er inverterbar netop når $A \sim I$, hvor I er identitetsmatricen.

  Desuden gennemgås kapitel 2.3 (i en kort form).

- **13.15–15.15:** De følgende opgaver er mange, men de fleste er helt ligetil.

  Injektiv/surjektiv: Lav 2.1.23 og 2.1.24.

  Regneregler for matrixprodukter: Opgave 2.1.29–32.

  Invers matrix: 2.2.1+5+7. Desuden **invers1** i MapleTA.

  Matrixligninger: 2.2.8+11+13.

  Sandt/falsk: Regn 2.1.15+16 og 2.2.9+10 og dernæst **Lay2.1truefalse** og **Lay2.2truefalse** (lav **hw**-udgaven hjemme).

- **15.30–16.15:** Her fortsættes med kapitel 2.8 og 2.9, hvor vi skal se på *underrum* af $\mathbb{R}^n$: Dette er en slags generalisering af linier og planer i $\mathbb{R}^3$. Som vi skal se kan underrum have forskellige *dimensioner*, og generelt kan dimensionen bestemmes ved at tælle antallet af vektorer i en *basis* for underrummet (en basis består af et system af vektorer, som både er *lineært uafhængigt* og som *frembringer* hele underrummet — repeter disse to begreber fra tidligere !!). Til enhver matrix er der knyttet to særlige underrum kaldet *nulrummet* og *søjlerummet*, som man kan opskrive direkte ud fra matricens reducerede echelonform — mere om det senere.

Som et eksamenslignende sæt (såvidt det er muligt allerede nu) er der lavet **quizz1-hold6** og **quizz1-however-hold6**. Som det fremgår af 'policies' er meningen at man har 45minutter, og at de i alt kan regnes 2 og 3 gange. Kravet til at 'bestå' er 35 af 45 points.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Vi fik sidste gang vist følgende om inverterbare matricer:
Hovedsætning 3: For en $n \times n$-matrix A er følgende egenskaber ensbetydende:

(1) A er inverterbar;

(2) Den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved $T(x) = Ax$ har en invers afbildning (dvs. T er både injektiv og surjektiv);

(3) Den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved $T(x) = Ax$ er injektiv eller surjektiv;

(4) $A \sim I_n$, dvs. A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen;

(5) $\det(A) \neq 0$.

I bekræftende fald er A^{-1} standardmatricen for T^{-1}.

Beviset var enkelt: Hvis (1) gælder, så kan vi indføre $S(y) = A^{-1}y$ (fordi A^{-1} eksisterer iflg. (1)) og prøve efter at $S \circ T(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ og at $T \circ S(y) = y$ for alle y; f.eks. haves $T(S(y)) = A(A^{-1}y) = I_n y = y$ (prøv selv med $S(T(x))$). Dermed er S invers afbildning til T, så (2) gælder når (1) gør det. Fordi $T^{-1}(y) = S(y) = A^{-1}y$, haves at A^{-1} som påstået er standardmatrix for T^{-1}. At (2) $\implies$ (3) er klart.

Hvis (3) gælder, så har A pivotpositioner i alle søjler henholdsvis alle rækker. I begge tilfælde udgør pivotpositioner diagonalen, fordi A er kvadratisk. Men da er $A \sim I_n$, hvilket viser at (4) gælder. At (4) $\implies$ (1) er vist vha. elementarmatricer i Lays Theorem 2.2.7. (Ækvivalensen med (5) kommer senere i kapitel 3.)

10. gang, tirsdag den 24. april.

- **12.30–13.15:** Her gør vi afsnit 2.8 færdigt.
- **13.15–15.15:** Vi regner en bunke opgaver, hvoraf mange er ret ligetil:

  Invertibilitet: Regn 2.2.18. Desuden 2.2.21+22 (brug hovedsætningerne!). Endelig 2.2.31+33.

  Underrum: Diskuter først opgave 2.8.1 i gruppen. Bevis dernæst (uden at kigge i noter mv.) at $\mathrm{Nul}(T) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0 \,\}$ er et underrum, når $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ er *lineær*.

  Sandt/Falsk: Lav **Lay2.8truefalse** — denne præsenterer alle spørgsmålene fra 2.8.21+22.

  Frembragte underrum: Regn 2.8.5.

  Nulrum/Søjlerum: Lav 2.8.11+13 (nemme) og 2.8.7+9 (rigtig gode!).

- **15.30–16.15:** Her gennemgås afsnit 2.9 om dimension af underrum og rangen af en matrix A (=antallet af pivotpositioner i A). Desuden går vi igang med afsnit 3.1–3.2 om determinanter.

11. gang, torsdag den 26. april.

- **12.30–13.15:** Her gør vi afsnit 2.9 færdigt og begynder på determinanter i 3.1.

- **13.15–15.15:** I opgaveregningen er programmet:

  Baser: Regn 2.8.17+19+20 (de to sidste kan afgøres uden regning vha. hovedsætningerne 1 og 2).

  Nulrum og Søjlerum: Lav 2.8.11+13.

  Baser for $\mathrm{Nul}(A)$ **og** $\mathrm{Col}(A)$**:** Lav 2.8.23+25.

  Rang: Lav 2.9.24+19+23 (brug rangformlen i sætning 14).

  Determinant: Regn 3.1.1+5.

  MapleTA: Der er en bunke nye opgaver på websiden. Regn så mange i kan nå — og fortsæt hjemme!

- **15.30–16.15:** Vi gennemgår 3.2 om determinanter.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Sidste gang fik vi indført *rangen* af en matrix $A_{m,n}$ som

$$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Col} A = \text{antallet af pivotpositioner i } A. \tag{1}$$

(= gælder fordi $\operatorname{Col}(A)$ har en basis bestående af *pivotsøjlerne* i A.)

Ligningen $Ax = b$, hvor $b \in \mathbb{R}^m$ er givet, er derfor *konsistent* netop når

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b), \tag{2}$$

altså hvis og kun hvis koefficientmatricen A og den udvidede koefficientmatrix $(A\ b)$ har *samme* rang. (Thi $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b)$ hvis og kun hvis den sidste søjle i $(A\ b)$ ikke er en pivotsøjle, som er et kriterium, vi udledte i kursets begyndelse.)

12. gang, tirsdag den 1. maj. Som forberedelse kan I repetere om elementarmatricer og regne øvelsesopgaven til kapitel 3.1+3.2.

- **12.30/–13.15:** Forelæsning over resten af kapitel 3.2 — og lidt af 3.3 determinanters brug i ligningsløsning og volumenbestemmelser.
- **13.15–15.15:** Til træning i de nye begreber:

  Rækkeoperationer: Lav først 3.2.1–4 som repetition af reglerne (nemme!). Regn så 3.1.33-36 som *verifikation* af reglerne i 2×2-tilfældet! Endelig laves 3.2.10 som *applikation* af reglerne.

  Udvikling af determinanter: 3.1.12+13.

  3×3**-reglen:** 3.1.15–16 (denne regel er ikke gennemgået, men den kan være bekvem for jer at lære nu).

  En faldgrube: Undgå den ved at regne 3.1.37+38 !!

  Inverterbarhed: 3.2.21+23.

  Produktreglen: 3.2.37+39.

  Cramers regel: Regn 3.3.5.

  MapleTA: Regn de nye **Lay3.2truefalse, elementaermatrix**, også som hjemmeopgaver.

- **15.30–16.15** Vi gennemgår kapitel 5.1–2 om *egenværdier* og *egenvektorer*.

  Det bliver (som vi skal se senere) en hovedpointe med hele kurset, at disse begreber ofte er ret afgørende for at forstå hvorledes f.eks. et dynamisk system udvikler sig som tiden går.

  Blandt andre eksempler på deres anvendelser kan nævnes analyse af computerberegningers pålidelighed (f.eks. GPS-systemet) eller dimensionering af bygninger og broer (det ville være ualmindeligt ærgerligt om Storebæltsbroen skulle bygges om. . .).

NB ! Der har været mange fejl i jeres studienumre. Alle bedes derfor besvare MapleTA-opgaven **check-registrering-hw**. Er svaret ‘false’ skal studienumret meddeles på e-mail til Arne Jensen på

`matarne@math.aau.dk`

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi fik sidste gang indført *egenværdierne* for en given $n \times n$-matrix som de reelle tal λ for hvilke ligningen

$$Ax = \lambda x \tag{3}$$

har løsninger $x \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$; disse x udgør egenvektorerne hørende til egenværdien λ, mens *egenrummet* E_λ udgøres af alle ligningens løsninger (dvs. $x = 0$ er tilføjet).

Der er her to hovedresultater:

$$\lambda \text{ er en egenværdi for } A \iff \det(A - \lambda I) = 0, \tag{4}$$

så egenværdierne udgøres af (de reelle) rødder i det *karakteristiske polynomium* for A, som er $p_A(z) = \det(A - zI)$. Når først egenværdierne er bestemt, har man

$$x \text{ er en egenvektor for } A \text{ hørende til } \lambda \iff x \neq 0 \text{ og } x \in \operatorname{Nul}(A - \lambda I). \tag{5}$$

Sidste betingelse betyder, at x løser det homogene ligningssystem $(A - \lambda I)x = 0$.

13. gang, torsdag den 3. maj.

- **12.30–13.15:** Vi fortsætter med mere om egenværdier og -vektorer i kapitel 5.1–2. Især om deres anvendelser på dynamiske systemer, jævnfør sidste afsnit i kapitel 5.2. Repeter gerne fra kapitel 1.10 eksemplet om til- og fraflytning af en storby.

- **13.15–15.15:** Der er mange opgaver, men nogle er ret nemme !

  Cramers formel for Ligninger: Regn 3.3.9. Opgaven belyser at determinantformlen kan være nyttig, da en sådan parameter s optræder tit i elektronik (rækkeoperationer ville være ret besværlige).

  Egenværdier: Træn begreberne ved at regne 5.1.5+7+19+20+18 (alle nemme).

  Egenrum: Lav 5.1.9+15.

  Find dernæst samtlige egenværdier og -vektorer for matricen A i bogens eksempel 4 i kapitel 5.1.

  Karakteristisk polynomium: Regn 5.2.5+9+17. Lav også 5.1.23 (nem).

  Multipliciteter: 5.2.18.

  MaplaTA: lav **determinants** og **ch3TF**; den sidste stiller 25 opgaver om determinanter fra kapitel 3.1–3.2 og de supplerende opgaver. Opgaverne fra 3.1–3.2 har alle været stillet før, men det skulle jo gøre det lettere at få alle 25 rigtige. Fortsæt hjemme med **hw**-udgaverne.

- **15.30–16.15:** Her vil jeg gennemgå mere om egenværdier og egenvektorer. Vi når et stykke ind i kapitel 5.3, hvor vi skal se på hvornår en lineær afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan beskrives ved en diagonalmatrix (— det ville jo ærlig talt være en del nemmere end at have en vilkårlig matrix —) og her viser det sig at egenværdier og egenvektorer spiller en afgørende rolle.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Som det sidste nye begreb i kurset indførtes sidste gang at matricen $A_{n,n}$ kaldes *diagonaliserbar*, dersom man kan skrive $A = PDP^{-1}$ for en passende diagonalmatrix $D_{n,n}$ og en inverterbar matrix $P_{n,n}$.

At ligningen $A = PDP^{-1}$ gælder, omtales som at A og D er *similære*.

Kurset runder af med nogle vigtige resultater:

- **Hvis** A er diagonaliserbar med $A = PDP^{-1}$ som ovenfor, så gælder at
  - D har A's *egenværdier* i diagonalen, dvs. $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
  - P har A's *egenvektorer* som søjler, med samme rækkefølge som i D; dvs. om $P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$ gælder mere præcist at $Av_j = \lambda_j v_j$ for $j = 1, \dots, n$.

  (NB ! Hverken D eller P kommer ud af den blå luft her !)

- A **ER** diagonaliserbar, dersom enten
  - $\mathbb{R}^n$ har en basis bestående af egenvektorer for A. (Dette er ikke bare en tilstrækkelig betingelse, men også en *nødvendig* betingelse.)
  - A har n forskellige egenværdier, eller
  - A er symmetrisk, dvs. $A^T = A$ (denne betingelse kaldes "spektralsætningen for reelle matricer").

14. gang, tirsdag den 8. maj. Dette bliver sidste seance med gennemgang af nyt stof. Vi får derfor en atypisk tidsplan med forelæsning kun i starten.

- **12.30–14.00** Her gennemgås resten af kapitel 5.3 om *diagonalisering* af matricer, jævnfør ovenstående. Desuden flere eksempler og anvendelser.

- **14.00–16.15** Her vil vi lave opgaver i det gennemgåede:

  Potenser af matricer: Regn 5.3.1+4.

  Similaritet med diagonalmatrix: Lav 5.3.5+6. (Nemme, men viser hvad sagen drejer sig om.)

  Simple diagonaliseringer: Regn 5.3.7+17+19 (overkommelige!).
  Hvorfor er $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ikke diagonaliserbar ? Er svaret overraskende ?

  Diagonalisering: Opgaverne 5.3.13+18 bør regnes igennem i *alle* detaljer.
  Lav 5.3.23 (brug lineær-afhængigheds-sætningen).

  Sandt/Falsk: Regn 5.3.21+22. Fortsæt med **ch5TF**; regn den flere gang til du får det hele rigtigt !

Der er også **opgavesamling1-hw**, som rummer en række af de tidligere stillede opgaver plus et par om egenværdier mm. Øv dig på dem !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I Matematisk regne- og fremlæggelsesteknik 2 (MR2) vil vi træne jer i *problemløsning og ræsonnering*. Programmet er:

Torsdag den 31. maj 2007: Vi begynder med

12.30–13.30: Opgaveregning i grupperummene (se nedenfor).

13.30–14.00: Auditorium 4, introduktion til MR2.

14.00–16.15: Opgaveregning i grupperummene.

Fredag den 1. juni 2007: Vores centrale dag med

8.15–9.00: Auditorium 4, introduktion til prøveeksamen, herunder fordeling af grupperne på computerrummene. Der er plads til 80 personer (trangt !), så vi må lade 1–2 grupper blive i grupperummene, afhængigt af fremmødet. Ønsker man at deltage i prøveeksamenen er det derfor vigtigt at møde frem i aud. 4 fredag morgen.

9.00–12.00: Prøveeksamen i computerrummene **A222, B144, B233, B348, D312.** (Se ovenfor!)

Prøveeksamen består af et sæt MapleTA spørgsmål, med en tidsgrænse på 3 timer fra start af besvarelsen, og der er kun et forsøg. I modsætning til den rigtige eksamen vil opgavesættet blive rettet af MapleTA med det samme, når I trykker på 'save and quit'. Resultatet vil også umiddelbart være tilgængeligt.

12.30–15.00: Opgaveregning i grupperummene.

15.00–16.00: Opsamling og spørgsmål i auditorium 4.

Mandag den 4. juni 2007:

8.15–8.30: Igangsætning i auditorium 4.

8.30–12.00: Opgaveregning i grupperummene.

12.30–13.00: Auditorium 4, opsamling og spørgsmål.

13.00–16.15: Opgaveregning i grupperummene.

Om eksamen mm: Læs venligst på Arne Jensens websted om **Fokus på fejl** og **Pensum og tilladte hjælpemidler**. Dette kan gøres ved at klikke på linkene nederst på

- http://www.math.aau.dk/˜matarne/mat2a/web/mr2.html .

Praktiske bemærkninger: Hjælpelærer bliver Hanne Laursen, som I kender fra Mat1A. Mandag 4/6 er jeg nødt til at have Svend Berntsen som vikar. Svend kan hjælpe jer med spørgsmål om *Lineær algebra* — men ikke med MapleTA. **NB. Alle spørgsmål om MapleTA bedes derfor stillet torsdag eller fredag !**

Opgavelister:

Torsdag 31/5 ser vi på alle 'emneopgaverne' fra MapleTA: **homogenligning1, lindep1, matrixmult1, lintransf1, invers1, soejlerum1, nulrum1, elementaermatrix, determinants og eigen.** Og navnlig **opgavesamling1**. Regn dem flere gange — tænk over (især ifm. diagonaliserbare matricer) om I bruger den smarteste metode ! Spørg!!

Dette skulle give opvarmningen til prøveeksamen 1. juni, jvf. foregående side.

Fredag 1/6 ser vi om eftermiddagen på opgaver i lineær algebra.
Begynd med prøveopgaverne nr. 2 og 4 fra

http://tnb.aau.dk/stud_info/eksamen/proeveopgaver/2006_07/matematik2A.html.

Disse belyser mange centrale emner (også selvom I skal til skriftlig eksamen. . .). Regn starten af prøveopgave 7 om *diagonalisering*.

Dernæst laves MapleTA-opgaverne teori1, teori3, ch3TF og ch5TF. Brug dem kvalificeret, dvs. lad være med at gætte, men regn dem ud fra teorien, så du forstår hvorfor svaret er 'true' eller 'false' ! Spørg !!

Mandag den 4/6 laves opgaver følgende opgaver fra Lay (Supl. x henviser til de supplerende opgaver til kapitel x).

Vælg de emner I har *mest* behov for at styrke jeres viden i:

Eksistens- og entydighed: Supl. 1: 5, 4.
Konsistente systemer: Supl. 1: 7.
Echelonform: Supl. 1: 8, 13.
Lineære transformationer: Supl. 1: 20.
Standardmatricer: Supl. 1: 21 og Supl. 2:8.
Linearkombinationer: 1.3.11+13.
Frembringelse: 1.4.13, 14, 21, 19 og 1.4.37 (begynd f.eks. med 4 erstatinger).
Lineær uafhængighed: Supl. 1: 14, 16, 17, 18, 19.
Basis: 2.8.17+19+20, 36 og 2.9.9, 11.
Koordinater: 2.9.7, 29.
Underrum: Bevis at $\mathrm{Nul}(A_{n,n})$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$. Bevis at E_λ, dvs. egenrummet hørende til egenværdien λ, er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
Matrixprodukt: 1.4.25 og Supl. 2: 3, 5, 6.
Invers matrix: Supl. 2: 2, 9, 10.
Matrixligninger: Supl. 2: 7, 8, 18.
Injektiv/Surjektiv: 2.8.33+34 og Supl. 1: 4, 22 og Supl. 2: 17.
Nulrum: 2.8.35 og Supl. 2: 16.
Billedrum/Søjlerum: 2.8.23+25 og 2.9.15.
Rangformlen: 2.8.31, 32 og 2.9.21.
Udspændte underrum: 2.9.13.
Determinanter: Supl. 3: 2+4, 5+6 og Supl. 5: 19+20+21
Elementarmatricer: Supl. 2: 15.
Egenværdiproblemer: 5.1.25+26 og Supl. 5: 2, 3, 4, 5
Egenværdier: 5.1.27, 5.2.19 og Supl. 5: 9, 13 (ignorer rådet).
Egenrum: 5.3.25+26.
Similaritet: 5.2.23, 24.
Diagonaliserbarhed: 5.3.25+26, 27 og Supl. 5: 8, 6.
Diagonalisering: Supl. 5: 18.

Mandagens opgaver kan også laves torsdag og fredag, men ej omvendt:
Mandag besvares ingen spørgsmål om MapleTA !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen