Oversigt nr. 1

I kurset "Lineær Algebra" skal vi bruge

> D. C. Lay: "Linear algebra and its applications", Third Edition Update, Addison–Wesley;

man kan også anvende Third Edition (men ej anden udgave).

I store træk vil kapitel 1–3 og 5.1–5.3 blive gennemgået. Som regel vil hver seance omhandle circa et/to afsnit i bogen.

Desuden kan det anbefales at man bruger følgende

> "Kompendium i lineær algebra, Definitioner, formler og eksempler" af Henrik Vie Christensen og Bo Rosbjerg.

Eksamen i kurset er skriftlig og baseret på computersystemet MapleTA (som ikke er det samme som 'regnemaskinen' Maple). Vi vil træne brugen af MapleTA i hele kurset; systemet bruges til automatisk retning af opgaver.

Hovedsiden med informationer om MapleTA findes her:
`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/mapleta/index.html`
Selvom informationssiderne er på engelsk, så vil opgaverne gradvist blive på dansk. Eksamensopgaverne formuleres alle på dansk.

Syntaksen i MapleTA er beskrevet letforståeligt her:
`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/syntax/syntax.html`

Ved første brug af systemet skal man ændre password og registrere sig på hold 6 — herunder skal man opgive sin email-adresse tildelt under `tnb.aau.dk` (derved har man mulighed for evt. at få tilsendt nyt password).

Uge	Dato	Seance	Emner
6	4/2	1	kapitel 1.1–2: Lineære ligninger. Rækkeoperationer.
6	7/2	2	kapitel 1.3: Vektorer i $\mathbb{R}^n$.
7	11/2	3	kapitel 1.4–5: Matrixligninger. Løsningsmængder.
9	25/2	4	kapitel 1.7: Lineær (u)afhængighed.
10	3/3	5	kapitel 1.8-9: Lineære tranformationer og deres matricer.
11	10/3	6	kapitel 1.10: Anvendelse af lineære transformationer.
12	17/3	7	kapitel 2.1: Matrixregning.
13	27/3	8	kapitel 2.2: Invers matrix.
14	31/3	9	kapitel 2.3: Inversion af matricer og lineære transformationer.
15	7/4	10	kapitel 2.8–9: Underrum. Basis. Dimension. Rang.
16	14/4	11	kapitel 3.1–2: Determinanter.
	17/4	12	kapitel 3.2–3: Mere om determinanter. Egenværdier og -vektorer.
17	21/4	13	kapitel 5.1–3: Karakteristiske polynomier. Diagonalisering.
18	28/4	14	kapitel 5.3: Mere om diagonalisering.
19	5/5	15	Eksempler og opgaveregning.

Ændringer kan naturligvis forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

1.gang, mandag den 4. februar 2008.

kl. 8.15–9.00 i auditorium 3: Efter en introduktion til kurset forelæses over "lineære ligninger" (afsnit 1.1) og temaet bliver *hvad, hvorfor og hvordan*.

Som I vil få at se er der en meget systematisk og overskuelig måde at løse lineære ligninger på, også hvis der skulle ske at være 5 ligninger og 12 ubekendte. Selve løsningsmetoden vil vi bruge en del kræfter på at *indøve* og *forstå*, for den bliver central for os i hele kurset. Om kort tid vil det derfor være en overkommelig opgave for jer at løse 7 ligninger med 7 ubekendte (tro det om I kan..).

Kl. 9.00–11.00 For at få en blid start, og for at stifte nærmere bekendtskab med bogen (og især de store anstrengelser Lay gør sig for at I kan få et godt udbytte), laver vi følgende opgaver:

- "Practice problems 1–4" til afsnit 1.1. Disse kan løses på grundlag af forelæsningen alene, men er ment som *træningsopgaver* efter man har læst afsnittet — løs "Practice problems" hver gang et afsnit er læst/gennemgået !
- **Sandt/falsk-opgave**: Diskuter opgave 1.23 i gruppen, men husk at *begrunde* jeres svar, som teksten før opgave 23 kræver !
- For at afprøve MapleTA kan I løse det første opgavesæt "intro" på

  `http://alba.tnb.aau.dk/mapleta/login/login.do`
- **AHA-opgaven**: Løs ligningssystemet i eksempel 1.1.1 på følgende måde: Først isoleres x_1 i 1. ligning og substitueres i 3. ligning. Dernæst isoleres x_2 i 2. ligning og indsættes i den nye 3. ligning (men ej i nr. 1). Derved er x_3 blevet bestemt; der bør jævnføres med midten af side 6 i bogen. Resultatet substitueres i ligning 1 og 2. Fortsæt indtil også x_1 og x_2 er bestemt.

  Ved at sammenligne med bogens gennemgang skulle to ting nu gerne stå klart: **Dels** optræder alle mellemfacitter i substitutionsmetoden også ved at bruge bogens metode (de to metoder er altså to sider af den samme sag), **dels** er bogens fremgangsmåde *langt* mere overskuelig.

Kl.11.15–12.00: Her gennemgås resten af afsnit 1.1 og 1.2.

Hjemmeforberedelse: Lær mere om MapleTA ved at læse vejledningen på de to link ovenfor. Husk at oprette URL'erne som bogmærker i jeres net-browsere !

Læs afsnit 1.1 og det gennemgåede i 1.2 i Lay. Og lav resten af opgaverne ovenfor.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Fra latinskolen: Det hedder en matrix, matricen og flere matricer. (Og selv når man så har bøjet dem, så kan det aldrig blive til en “matrice” i ental.)

Vi så første gang, at man ved løsning af et lineært ligningssystem kan nøjes med at lave rækkeoperationer på matricer. Mere præcist er strategien at totalmaticen skal bringes på *reduceret* echelonform. I almindelighed fører dette til en *parametrisk beskrivelse* af løsningsmængden til et lineært system, som skitseret sidst.

2. gang, NB ! **torsdag den 7. februar.**

- **12.30–13.15:** Her gennemgås resten af afsnit 1.1.2 om eksistens- og entydighedssætningen.
- **13.15–15.15:** Vi laver opgaver i:

  Sandt eller falsk: Regn 1.1.24 sammen i gruppen — diskuter ! (Men husk at læse indledningen foran 1.1.23.)

  Dernæst laves samme opgave i Maple TA under **Lay1.1TF**. Prøv gerne flere gange, indtil du føler dig sikker !

  Rækkeoperationer: For at træne dette laves 1.1.5+7+11+13. NB ! Gå systematisk til værks !

  Konsistens: Regn 1.1.15+17+18.

  Hvad vil Lay opnå med ordren “do not completely solve the systems.” ??

  Echelonform: Regn 1.2.2.

  Anvendelser: Lav 1.1.33+34.

  Maple-øvelser: Prøv opgaverne i **lineaere ligninger1**.

- **15.30–16.15:** Her gennemgås kapitel 1.3 om vektorer. Læs hjemmefra det velkendte om $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$, så vi fælles kan se på det nye i $\mathbb{R}^n$ — det skal vi bruge til ligningssystemer med uendeligt mange løsninger.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi fik sidste gang gennemgået afsnit 1.3 med hovedvægt på tilfældet $\mathbb{R}^n$. Desuden så vi på den generelle definition af en *afbildning:* For to vilkårlige mængder M og K siger man at en forskrift f er fra M til K, skrevet $f\colon M \to K$, dersom f til vhert element $x \in M$ knytter/udpeger præcis et element $y \in K$; da skrives $f(x) = y$. Dette generaliserer funktionsbegrebet. Som eksempler har man fra Mat1A både den komplekse eksponentialfunktion $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ givet ved $\exp(x + \mathrm{i}\, y) = e^x \cos y + \mathrm{i}\, e^x \sin y$ og differentiationen $g(x) \mapsto g'(x)$ (som er en afbildning mellem to mængder af funktioner).

Regn øvelsesopgaverne 'practice problems' til afsnit 1.2 og 1.3 hjemmefra. Gør et oprigtigt forsøg, før du ser løsningsforslaget i bogen !

3. gang, mandag den 11. februar.

- **12.30–13.15:** Her gennemgås først lidt om generelle afbildinger og de betingelser der sikrer, at der eksisterer en *omvendt* afbildning. Dernæst lidt af afsnit 1.4 frem til Theorem 4.

- **13.15–15.15:** Opgaveregning i følgende (de er mange, men ej tekniske):

  Echelonform: Gennemsku opgave 1.2.5+6.

  Konsistens: Lav 1.2.15+16+17+23+24; de kræver meget få udregninger.

  Parametriserede løsningsmængder: Lav 1.2.9+11+13.

  Linear kombinationer: 1.3.11.

  Frembringelse: 1.3.18. Og opgave 1.3.25 er rigtig god !!

  Anvendelser: *Interpolation* er en almindeligt brugt videnskabelig metode, I givetvis vil møde senere; her giver den lidt træning i lineære ligninger via opgave 1.2.33+forteksten. Fortsæt gerne med 1.2.34.

  Sandt/falsk: Lav først opgaverne 1.2.21+22 og 1.3.23+24 som teoriopgaver. Gå dernæst til MapleTA, hvor **Lay1.2TF, Lay1.3TF** hver gang stiller to nye opgaver fra hvert afsnit. Lav dem så mange gange, at du bliver fortrolig med opgaverne.

- **15.30–16.15:** Her gennemgås resten af kapitel 1.4 og 1.5.

Vedr. **MapleTA-øveopgaver**: Der ligger en opgave som **raekkeoperationer1** I kan lave hjemme — blandt andet for at øve syntaksen i MapleTA for matricer, der indlæses *rækkevist*; brug preview for at kontrollere resultatet inden du trykker på grade! Desuden er der **vektorregning1**, der tester evnen til at regne med vektorer.

Opgaverne tester både evnen til at regne helt rigtigt, og evnen til at få resultatet rigtigt ind i MapleTA. Bliv ved, indtil alle svarene er korrekte !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Sidste gang gennemgik vi lidt almen teori om *afbildninger*:

Definition 1. *En afbildning $f\colon M \to K$ er en forskrift f, som til ethvert $x \in M$ knytter et og kun et element $y \in K$; dette skrives som $y = f(x)$. Den afsendende mængde M kaldes definitionsmængden for f; den modtagende mængde K kaldes rådighedsmængden.*

I tilfældet $M = \mathbb{R}$ og $K = \mathbb{R}$ er enhver afbildning blot en sædvanlig reel funktion, som f.eks. $\sin$ eller $\exp$.

Et andet eksempel fås af skalarproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v}$ af vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$. Dette er en afbildning $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto \vec{u} \cdot \vec{v}$, når man som mængderne M og K bruger

$$M = \left\{ (\vec{u}, \vec{v}) \mid \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \qquad K = \mathbb{R}.$$

Et mere abstrakt eksempel er differentiation, dvs. $f \mapsto f'$, som giver en afbildning f.eks. fra mængden M af alle differentiable funktioner på intervallet $]3,7[$; herved kunne K så blot være mængden af vilkårlige funktioner defineret på $]3,7[$.

Blandt de egenskaber afbildninger kan have, så vi på følgende:

Definition 2. *Afbildningen $f\colon M \to K$ kaldes* **injektiv***, dersom der for* alle *$x_1, x_2 \in M$ gælder*

$$f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2.$$

f siges at være **surjektiv***, hvis der til ethvert $y \in K$ eksisterer et $x \in M$ så*

$$f(x) = y.$$

Hvis f både er injektiv og surjektiv siges f at være en **bijektion** *(eller bijektiv).*

Delmængden $\mathrm{Vm}(f) = \{ y \in K \mid y = f(x) \text{ for et } x \in M \}$ kaldes for *billed-* el. *værdimængden* for f; denne skrives også som $f(M)$ og kaldes da f's billede af M. Altså er f surjektiv netop når billedet $f(M)$ ikke er en ægte delmængde af K. Som et hovedresultat har man

Sætning 1. *For en afbildning $f\colon M \to K$, mellem to vilkårlige mængder M og K, er følgende egenskaber ensbetydende:*

(i) *Der findes en afbildning $g\colon K \to M$ som opfylder*

$$\begin{aligned} g(f(x)) &= x \quad \textit{for ethvert } x \in M \\ f(g(y)) &= y \quad \textit{for ethvert } y \in K. \end{aligned}$$

(ii) *f er både* injektiv *og* surjektiv.

I bekræftende fald er afbildningen $g\colon K \to M$ entydigt bestemt; og f siges at være inverterbar, mens g kaldes inversen *(el. den omvendte afbildning) til f og skrives $g = f^{-1}$. Ydermere er f^{-1} selv inverterbar med $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Bevis: For at vise at (i) $\Longrightarrow$ (ii) antages at en afbildning g som i (i) eksisterer. Da er f injektiv, for hvis $f(x_1) = f(x_2)$ kan man anvende g på begge sider hvorved (i) giver

$$x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2.$$

Anden linie af (i) giver direkte at f er surjektiv. Dermed er (ii) vist at gælde for f.

Omvendt kan det antages at f opfylder (ii). Da f er surjektiv sluttes, at der til ethvert $y \in K$ eksisterer (mindst) en løsning $x \in M$ til ligningen

$$y = f(x). \tag{1}$$

Da f er injektiv er x entydigt bestemt ved y. Dermed giver $y \mapsto x$ en afbildning $g\colon K \to M$; da $g(y) = x$ viser (1) at $f(g(y)) = y$; og da $y \in Y$ er et vilkårligt element viser dette anden linie af (i). Anvendes g på begge sider af (1) ses at $x = g(y) = g(f(x))$; dette giver første linie af (i). Dermed er implikationen (ii) $\Longrightarrow$ (i) vist.

I bekræftende fald noteres, at hvis også $h\colon K \to M$ er en afbildning som opfylder at $h(f(x)) = x$ og $f(h(y)) = y$ for alle $x \in M$ og alle $y \in K$ (altså har samme egenskaber som g), så er $h(y) = g(y)$ for ethvert $y \in K$, thi (i) giver

$$h(y) = h(f(g(y))) = g(y).$$

Dette viser at g er entydigt bestemt ved f, så man kan skrive $g = f^{-1}$. Betragtes udsagnene i (i) for $g = f^{-1}$ ses at f^{-1} er inverterbar, og da dennes inverse er entydigt bestemt er $f = (f^{-1})^{-1}$. Beviset er ført.

Som forberedelse til 4. gang bedes I læse afsnit 1.4 og regne de tilhørende ‘praktikproblemer’ og 1.4.23.

Desuden bør I repetere *injektivitet* og *surjektivitet* fra det ovenstående. Bemærk at vi i Theorem 4 i afsnit 1.4 også har den ækvivalente egenskab: “(0) $x \mapsto Ax$ er en surjektiv afbildning $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$”. (Jævnfør sidste gang.)

4. gang, mandag den 25. februar.

- **8.15–9.00:** Gennemgang af afsnit 1.5 om homogene ligningssystemer og lidt af afsnit 1.7.

- **9.00–11.00:** Opgaveregningens menukort af lettere anretninger (begrebstræning snarere end regnetræning):

  Vektorer i $\mathbb{R}^n$ 1.3.7+9. Diskuter i gruppen !

  Matrixprodukt 1.4.1–4.

  Matrixligning 1.4.9+10.

  Frembringelse Først 1.4.17–20. Dernæst 1.4.21+22.

  Konsistens *uden* rækkeoperationer: 1.4.31+32.

  Homogene systemer 1.5.9+11.

Sandt/falsk: Lav først opgaverne 1.4.23+24 som teoriopgaver. Gå dernæst til MapleTA og lav **Lay1.4TF**. Besvar **homogenligning1** for at blive fortrolig med løsninger på parametrisk form (fortsæt hjemme!).

- **11.15–12.00:** Her forsætter vi med *lineær uafhængighed* i afsnit 1.7; dette begreb bliver *centralt* kurset igennem.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

For en oversættelse af begreberne til dansk henvises til Arne Jensens liste på

`http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/term.html`

Listen kan også give et overblik over alle de nye begreber. Velegnet til *selvoverhøring* !

5. gang, mandag den 3. marts. Som forberedelse til denne seance bør I læse afsnit 1.6+7 og lave 'practice problems' til afsnit 1.7 og 1.7.21. (NB ! Opgaverne illustrerer mange mulige fejlslutninger i forbindelse med lineær uafhængighed.)

- **8.15–9.00:** Her gør vi kapitel 1.7 om lineær uafhængighed færdigt, især Theorem 7 med bevis.
- **9.00–11.00:** Til opgaveregningen:

  Parametrisk vektorform: Regn 1.5.7+13+17.

  Homogene systemer: Lav **homogenligning1** i MapleTA.

  Inhomogene sys. 1.5.29–32. Diskuter vha. Sætning 1.5.4 !
  Lav dernæst **lineaere ligninger2** i Maple TA.

  Lineær (u)afhængighed 1.7.1–4 som simpel træning; de kan *diskuteres* i gruppen. *Regn* dernæst 1.7.5+7.

  Regn så 1.7.9, og overvej hvorfor (a) og (b) ikke kommer ud på det samme!

  God forståelse (som ofte kan spare mange regninger!) kan fås af opgave 1.7.31–32.

  Endelig er der 1.7.33–40. (De er små og sjove...)

  Den "samfundsvidenskabelige" 1.6.14 (som også er sjov..).

  Sandt/falsk Lav først 1.5.23+24. Besvar dernæst **Lay1.5TF** i MapleTA.

- **11.15–12.00:** Her gennemgår vi kapitel 1.8-1.9. Dele af det bør være velkendt (definitions- og rådighedsmængde, injektiv og surjektiv — repeter !). Men der er mange eksempler på lineære afbildninger.

NB ! Kurset bliver vanskeligere nu — det vil være en stor hjælp for jer at prøve at regne opgaverne hjemmefra !

[...jo for så kan øvelsestiden udnyttes bedre til de ting I ikke kan klare på egen hånd...]

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Bemærk at vi undervejs i kapitel 1.4 så følgende:
Hovedsætning 1. For en $k \times n$-matrix A er følgende egenskaber ækvivalente:

(0) $x \mapsto Ax$ er en surjektiv afbilding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(1) For ethvert $b \in \mathbb{R}^k$ har ligningen $Ax = b$ mindst en løsning $x \in \mathbb{R}^n$.

(2) Ethvert $b \in \mathbb{R}^k$ er en linearkombination af A's søjler.

(3) A's søjler udspænder $\mathbb{R}^k$

(4) A har en pivotposition i hver række.

I analogi hermed har vi et lignende resultat (spredt ud over kapitel l.5 og 1.9):
Hovedsætning 2. For en $k \times n$-matrix A er følgende egenskaber ækvivalente:

(0) $x \mapsto Ax$ er en injektiv afbilding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$.

(1) Ligningen $Ax = 0$ har kun den trivielle løsning $x = 0$.

(2) Ligningen $Ax = 0$ har ingen frie variable.

(3) A's søjler er lineært uafhængige i $\mathbb{R}^k$.

(4) A har en pivotposition i hver søjle.

Bemærkning: 1° For et lineært system $A_{k,n}x = b$ kan der iflg. Sætning 2 ikke være entydighed af løsningerne for $k < n$ ('bred' matrix). Derfor siges $Ax = b$ i så fald at være et *underbestemt* ligningssystem.

2° For et lineært system $A_{k,n}x = b$ kan der iflg. Sætning 1 ikke eksistere løsninger uafhængigt af b hvis $k > n$ ('smal' matrix). I så fald siges $Ax = b$ at være et *overbestemt* ligningssystem.

3° For entydighed af løsninger til $A_{k,n}x = b$ er $k \geq n$ altså *nødvendigt*. For eksistens af løsninger for alle $b \in \mathbb{R}^k$ er derimod $k \leq n$ en *nødvendig* betingelse. Derfor er det kun for *kvadratiske* matricer man har både eksistens og entydighed af løsningerne til $Ax = b$. (Men det kvadratiske kan ikke sikre nogen af delene. Dog skal vi senere se at injektivitet er ækvivalent med surjektivitet af $x \mapsto Ax$ når $k = n$.)

4° For vilkårlig lineær transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ har man de samme resultater om ligningen $T(x) = b$, idet man blot kan introducere T's standardmatrix $A = \begin{pmatrix} T(e_1) & \dots & T(e_n) \end{pmatrix}$, som jo opfylder at $T(x) = A \cdot x$. Derfor kan injektivitet/surjektivitet for T diskuteres direkte vha. sætningerne.

6. gang, mandag den 10. marts. Som forberedelse regnes hjemme blandt andet **lineaere ligninger2**.

- **8.15–9.00:** Vi repeterer lidt om lineære transformationer i kapitel 1.8–9 og fokuserer på sætning 10 om *standardmatricen* for en lineær transformation; herunder eksempel 3 og tabel 1–4. Bemærk at sætning 11+12 om injektive og surjektive lineære tranformationer faktisk er indeholdt i hovedsætningerne ovenfor.

- **9.00-11.00:** I det nye stof ses på en bunke opgaver (flere er ganske ligetil):

  Lineær (u)afhængighed: 1.7.21+22 diskuteres i gruppen og besvares i Maple-TA som **Lay1.7TF**.

  Linearitet: Regn opgaverne 1.8.29+30+32+33+36.

  Standardmatricer: Lav opgave 1.9.17-20.

  Forbindelsen til pivotsøjler: Regn opgaverne 1.9.31+32.

  Forbindelsen mellem $m \times n$ og injektiv/surjektiv: Regn 1.9.35. Desuden **Matrix vektorligning teori1**.

  Linearitet ved sammensætning: Bevis følgende sætning:

  Når $S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ og $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ begge er lineære afbildninger, så er også den sammensatte afbildning $T \circ S\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$ lineær.

  Vink: se opgave 1.9.36.

- **11.15–12.00:** Vi gennemgår et par af anvendelserne af lineære transformationer i afsnit 1.10.

  Desuden tager vi hul på afsnit 2.1 om regneregler for matricer. Som vi skal se er det ganske ligetil at danne summen $A + B$ af to matricer af samme størrelse, og at multiplicere dem med et tal, tA.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

7. gang, mandag den 17. marts.

- **8.15–9.00:** Her vil vi fortsætte gennemgangen af kapitel 2.1 om *matrixregning*, især skal vi lære om produktet af matricer.

- **9.00–11.00:** Her regnes opgaver i:

  Injektivitet: Lad $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \end{pmatrix}$ og betragt den lineære afbildning givet ved $x \mapsto A \cdot x$, Er denne injektiv ?
  Bestem også A's nulrum, dvs. $\{\, x \in \mathbb{R}^2 \mid A \cdot x = 0 \,\}$.
  Er afbildningen surjektiv ?

  Standardmatricer: Lav 1.9.1–7 og 1.9.19+22 (alle er ret ligetil).

  Anvendelser: Opgaverne 1.10.1+7 (søg inspiration i afsnit 1.10).

  Matrixregning: Opgave 2.1.1+2 og **matrix multiplikation**.

  MapleTA: Regn **Lay1.8TF, Lay1.9TF** og **lineaer afbildning1** samt den vigtige **lineaer (u)afhaengighed1** (svær!?).

  Endelig laves gamle opgaver hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her vil vi begynde på kapitel 2.2 om inverse matricer A^{-1}. (Disse skal man nok se som pendent til det reciprokke a^{-1} af et tal $a \neq 0$.)

NB! Man opfordres kraftigt til hjemme at regne opgave 1 blandt Lays supplerende opgaver til kapitel 1. Den findes også som **Chapter 1 reviewTF**. Derved repeteres hele teorien i kapitlet, så regn den bare 5–6 gange!

Man kan også teste sig selv ved at regne **Lay chapter1TF**, som giver alle de tidligere teoriopgaver til kapitel 1. Test jer selv om I har forstået det hele — det ville jo være skønt at få fod på de grundlæggende dele af kurset nu 3 måneder før eksamen (i st.f. 3 dage før).

Så bliver kurset også nemmere at følge fremover… Brug faciliteterne !!

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Regn som forberedelse 2.1.15+16, alias **Lay2.1TF**, og **matrixoperationer1** hjemmefra.

8. gang, torsdag den 27. marts.

- **12.30–13.15:** Vi tager her hul på kapitel 2.2 om inverse matricer, A^{-1}.
- **13.15–15.15:** I grupperne kan I regne:

  Matrixprodukt: Lav 2.1.5+7+12+13.

  Desuden **matrixmultiplikation**; bliv ved til række-søjle-reglen nærmest følges som en refleks !

  Abnormiteter: Regn 2.1.9.

  Enhedsmatricen: Eftervis resultatet i 2.1.31+32. Bruges ofte !

  Regneregler: Lav 2.1.29–30.

  Anvendelser: Opgave 1.10.11.

- **15.30–16.15:** Vi gennemgår resten af afsnit 2.2 om *inversen* A^{-1} til en matrix A: Vi skal lære hvordan man finder A^{-1} i praksis, når den eksisterer. I forklaringen møder vi nye venner kaldet *elementarmatricer*. Som vi skal se, har disse optrådt i baggrunden hver gang vi har udført rækkeoperationer !

NB ! I opfordres kraftigt til at bruge tid på opgaverne

- **lineaer (u)afhaengighed1**, den er sværere end de fleste, men brug metoden forklaret den 17/3;
- **lineaer afbildning1**, forstå den ! det må ikke bare være 'mønstergenkendelse'.
- **matrix vektorligning teori1**, brug Hovedsætning 1 og 2 fra oversigt nr. 7.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Reflektion: Vi har nu været gennem de 8 af kursets 15 seancer, altså over halvdelen. Men vi mangler stadig at møde over halvdelen af de nye begreber, kurset byder på (!!). Det er derfor nu, kurset bliver svært.

En god ide er, at man med papir og blyant (og lukket bog) for repetitionens skyld holder foredrag for sig selv om:

> linearkombinationer, lineær uafhængighed, spændet af k vektorer, frembringelse af $\mathbb{R}^n$, lineær transformation, standardmatricer, produkt af matrix og vektor, produkt af to matricer; invers matrix.

Om matrixligninger. Vi så sidste gang hvordan man kan løse *matrixligninger* af formen $A_{k,n}X_{n,p} = B_{k,p}$, hvor X er den ubekendte mens koefficientmatricen A og ligningens *data* B er givne matricer. Vores eksempel var

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

Metoden er at udføre rækkeoperationer på totalmatricen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 11 & 2 \end{smallmatrix}\right)$, som altså blot er A udvidet med en søjle mere end tidligere. (Facit er $X = \left(\begin{smallmatrix} 7 & 9 \\ -2 & -5 \end{smallmatrix}\right)$ — regn efter !)

9. gang, mandag den 31. marts.

- **8.15–9.00:** Her gennemgås kapitel 2.3 (i en simplere form) om inverterbare matricer og inverterbare lineære afbildninger. Dette skal uddybe forståelsen af inverse matricer.

- **9.00–11.00:** Lav følgende opgaver om **matrixinversion:**

  Sandt/falsk: Diskuter 2.2.9+10 i gruppen, og lav så individuelt **Lay2.1TF**.

  Beregning af invers matrix: Lav 2.2.1+5+7. Desuden **invers matrix1**.

  Invers matrix, teori: Regn 2.2.8+11+13. Dernæst **invers matrix teori1**.

  Matrixligninger: Løs først ligningen

  $$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

  Gennemsku derefter 2.2.12.

- **11.15–12.00:** Her begynder vi på kapitel 2.8 og 2.9, hvor vi skal se på *underrum* af $\mathbb{R}^n$: Dette er en generalisering af linier og planer i $\mathbb{R}^3$. Som vi skal se kan underrum have forskellige *dimensioner*, og generelt kan dimensionen bestemmes ved at tælle antallet af vektorer i en *basis* for underrummet (en basis består af et system af vektorer, som både er *lineært uafhængigt* og som *frembringer* hele underrummet — repeter disse to begreber fra tidligere !!).

Til enhver matrix er der knyttet to særlige underrum kaldet *nulrummet* og *søjlerummet*, som man kan opskrive direkte ud fra matricens reducerede echelonform — mere om det senere.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Vi fik sidste gang vist følgende om inverterbare matricer:
Hovedsætning 3: For en $n \times n$-matrix A er følgende egenskaber ensbetydende:

(1) A er inverterbar;

(2) Den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved $T(x) = Ax$ har en invers afbildning (dvs. T er *både* injektiv og surjektiv);

(3) Den lineære transformation $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ givet ved $T(x) = Ax$ er injektiv eller surjektiv;

(4) $A \sim I_n$, dvs. A er rækkeækvivalent med enhedsmatricen;

(5) $\det(A) \neq 0$.

I bekræftende fald er A^{-1} lig standardmatricen for (den lineære afbildning) T^{-1}.

Beviset er enkelt: Hvis (1) gælder, så kan vi indføre $S(y) = A^{-1}y$ (fordi A^{-1} eksisterer iflg. (1)) og prøve efter at $S \circ T(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}^n$ og at $T \circ S(y) = y$ for alle y; f.eks. haves $T(S(y)) = A(A^{-1}y) = I_n y = y$ (prøv selv med $S(T(x))$). Dermed er S invers afbildning til T, så (2) gælder når (1) gør det. Fordi $T^{-1}(y) = S(y) = A^{-1}y$, haves at A^{-1} som påstået er standardmatrix for T^{-1}. At (2) $\Longrightarrow$ (3) er klart.

Hvis (3) gælder, så har A pivotpositioner i alle søjler eller alle rækker (jvf. Hovedsætning 1 og 2). I begge tilfælde udgør pivotpositionerne diagonalen, fordi A er kvadratisk. Men da er I_n lig den reducerede echelonform af A, så $A \sim I_n$, hvilket viser at (4) gælder. At (4) $\Longrightarrow$ (1) er vist vha. elementarmatricer i Lays Theorem 2.2.7. (Ækvivalensen med (5) kommer senere i kapitel 3.)

10. gang, mandag den 7. april.

- **8.15–9.00:** Her gør vi afsnit 2.8 færdigt (se beskrivelsen til 9. gang).
- **9.00–11.00:** Vi regner en bunke opgaver, hvoraf mange er ret ligetil:

Invertibilitet: Regn 2.2.18. Desuden 2.2.21+22 (brug hovedsætningerne!). Endelig 2.2.31+33.

Sandt/Falsk: Lav **Lay2.3TF** — glimrende træning i Hovedsætning 1, 2, 3 !

Matrixligning: Find den matrix $X = \left(\begin{smallmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{smallmatrix}\right)$ som løser ligningen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestem dernæst løsningen til

$$Y \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

NB ! Den ubekendte Y står til venstre.

Underrum: Diskuter først opgave 2.8.1 i gruppen. Bevis dernæst (uden at kigge i noter mv.) at $\operatorname{Nul}(T) = \{\, x \in \mathbb{R}^n \mid T(x) = 0 \,\}$ er et underrum, når $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ er *lineær*.

Elementarmatricer: Regn opgaven **elementaer matrix**.

Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

- **11.15–12.00:** Her gennemgås afsnit 2.9 om dimension af underrum og *rangen* af en matrix A (=antallet af pivotpositioner i A).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

11. gang, mandag den 14. april.

- **8.15–9.00:** Her gør vi afsnit 2.8–9 færdige.
- **9.00–11.00:** I opgaveregningen er programmet:

  Underrum: Lav 2.8.1 (nemme!). Godtgør at der for enhver *lineær* afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ gælder at dens billedmængde

  $$T(\mathbb{R}^n)\{\, y \in \mathbb{R}^k \mid y = T(x) \text{for et } x \in \mathbb{R}^n \,\}$$

  er et *underrum* af $\mathbb{R}^k$.

  Basis og dimension: Regn 2.8.15+17+19+20 (de to sidste kan afgøres uden regning vha. hovedsætningerne 1 og 2) og **span1**.

  Nulrum og Søjlerum: Lav 2.8.11+13.

  Rang: Lav 2.9.24+19+23 (nemme, brug rangformlen i sætning 14).

  Baser for $\mathrm{Nul}(A)$ og $\mathrm{Col}(A)$: Lav 2.8.23+25. Dernæst **soejlerum1** og **nulrum1**.

- **11.15–12.00:** Vi gennemgår 3.1 og lidt af 3.2 om determinanter.

Man kan øve sig på stoffet i kapitel 2 ved at regne **Lay2SupplTF** (findes også i bogform fra supplementsafsnittet til kapitel 2) og **teori chapter1og2**.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Forrige gang fik vi indført *rangen* af en matrix $A_{m,n}$ som

$$\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Col} A = \text{antallet af pivotpositioner i } A. \tag{2}$$

(sidste = gælder fordi $\operatorname{Col}(A)$ har en basis bestående af *pivotsøjlerne* i A.)

Ligningen $Ax = b$, hvor $b \in \mathbb{R}^m$ er givet, er derfor *konsistent* netop når

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b), \tag{3}$$

altså (med ord) hvis og kun hvis koefficientmatricen A og den udvidede koefficientmatrix $(A\ b)$ har *samme* rang. (Thi $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A\ b)$ hvis og kun hvis den sidste søjle i $(A\ b)$ ikke er en pivotsøjle — et kriterium vi udledte i kap. 1.)

I kan nu øve jer på **quizz1**, som tager jer gennem hele kapitel 1 og 2 !

12. gang, torsdag den 17. april. Som forberedelse bedes I repetere om elementarmatricer og regne **elementaer matrix1** og øvelsesopgaven til kapitel 3.1.

- **12.30/–13.15:** Forelæsning af kapitel 3.2 — og lidt af 3.3 om determinanters brug i ligningsløsning og volumenbestemmelser.
- **13.15–15.15:** Til træning i de nye begreber:

  Determinant: Regn 3.1.1+5.

  Udvikling af determinanter: 3.1.12+13.

  3×3**-reglen:** 3.1.15–16 (denne regel er ikke gennemgået, men den kan være bekvem for jer at lære nu).

  En faldgrube: Undgå den ved at regne 3.1.37+38 !!

  Inverterbarhed: 3.2.21+23.

  Produktreglen: 3.2.37+39.

  Cramers regel: Regn 3.3.5.

  MapleTA: Regn **Lay3.1TF, determinant1 og determinant udvikling1**.

- **15.30–16.15** Vi gennemgår (resten af kapitel 3.2+) kapitel 5.1 om kursets sidste hovedemne: *egenværdier* og *egenvektorer*.

  Det er (som vi skal se senere) en hovedpointe med hele kurset, at disse begreber ofte er ret afgørende for at forstå hvorledes f.eks. et dynamisk system udvikler sig som tiden går.

  Blandt andre eksempler på deres anvendelser kan nævnes analyse af computerberegningers pålidelighed (f.eks. GPS-systemet) eller dimensionering af bygninger og broer (det ville være ualmindeligt ærgerligt om Storebæltsbroen skulle bygges om. . .).

13. gang, mandag den 21. april.

- **8.15-9.00:** Vi fortsætter med mere om egenværdier og -vektorer i kapitel 5.1–2. Især om deres anvendelser på dynamiske systemer, jævnfør sidste afsnit i kapitel 5.2. Repeter gerne fra kapitel 1.10 eksemplet om til- og fraflytning af en storby.

- **9.00–11.00:** Der er mange opgaver, men nogle er ret nemme !

  Cramers formel for Ligninger: Regn 3.3.9. Opgaven belyser at determinantformlen kan være nyttig, da en sådan parameter s optræder tit i elektronik (rækkeoperationer ville være ret besværlige !).

  Rækkeoperationer i determinanter: Lav først 3.2.1–4 som repetition af reglerne (nemme!). Regn så 3.1.33-36 som *verifikation* af reglerne i 2×2-tilfældet!

  Endelig laves 3.2.10 som *applikation* af reglerne.

  Egenværdier: Træn begreberne ved at regne 5.1.5+7+19+20+18 (alle nemme).

  Egenrum: Lav 5.1.9+15.

  Find dernæst samtlige egenværdier og -vektorer for matricen A i bogens eksempel 4 i kapitel 5.1.

  Karakteristisk polynomium: Regn 5.2.5+9+17. Lav også 5.1.23 (nem).

  MaplaTA: Regn **Lay3.2TF, Lay3supplTF, Lay5.1TF**.

- **11.15–12.00:** Her gennemgås mere om egenværdier og egenvektorer. Vi når et stykke ind i kapitel 5.3, hvor vi skal se på hvornår en lineær afbildning $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kan beskrives ved en diagonalmatrix (— det ville jo ærlig talt være en del nemmere end at have en vilkårlig matrix —) og her viser det sig at egenværdier og egenvektorer spiller en afgørende rolle. Dette kendes som *diagonalisering*.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Vi fik forrige gang indført *egenværdierne* for en given $n \times n$-matrix som de reelle tal λ for hvilke ligningen

$$Ax = \lambda x \tag{4}$$

har løsninger $x \neq 0$ i $\mathbb{R}^n$; disse x udgør egenvektorerne hørende til egenværdien λ, mens *egenrummet* E_λ udgøres af alle ligningens løsninger (dvs. $x = 0$ er tilføjet).

Der er her to hovedresultater:

$$\lambda \text{ er en egenværdi for } A \iff \det(A - \lambda I) = 0, \tag{5}$$

så egenværdierne udgøres af (de reelle) rødder i det *karakteristiske polynomium* for A, som er $p_A(z) = \det(A - zI)$. Når først egenværdierne er bestemt, har man

$$v \text{ er en egenvektor for } A \text{ hørende til } \lambda \iff v \neq 0 \text{ og } x \in \operatorname{Nul}(A - \lambda I). \tag{6}$$

Sidste betingelse betyder, at v løser det homogene ligningssystem $(A-\lambda I)v = 0$. Underrummet $E_\lambda = \operatorname{Nul}(A - \lambda I)$ kaldes *egenrummet* hørende til egenværdien λ.

Sidste gang blev afsnittene om dynamiske systemer i kapitel 5.1+2 gennemgået grundigt. Men der var ikke så meget nyt stof, og derfor bliver øvelserne nedenfor til dels i nyt stof fra kapitel 5.3 (OBS!).

14. gang, mandag den 28. april.

- **8.15-9.00** Her gennemgås først similære matricer (afsnit 5.2) og anvendelsen i eksempel 5.3.(1+)2 om *potenser* af matricer.

  Dernæst et eksempel på anvendelse af egenværdier i forbindelse med differentialligninger; vi tager udgangspunkt matricen i eksempel 5.1.2+3.

  Dernæst definerer vi at en matrix er *diagonaliserbar* (afsnit 5.3) hvis den er similær med en diagonalmatrix, og beskæftiger os med sætning 5.3.5 som afklarer hvornår dette er tilfældet.

- **9.00–11.00** Her vil vi lave opgaver til dels i det **gennemgåede**:

  Potenser af matricer: Regn 5.3.1+4.

  Egenrum: Lav 5.1.11+15.

  Dynamiske systemer: Repeter sagerne ved at lave 5.1.33.

  Similaritet med diagonalmatrix: Regn 5.3.5+6. (Nemme, men viser hvad sagen drejer sig om: Brug sætning 5.3.5.)

  Simple diagonaliseringer: Regn 5.3.7+17+19 (overkommelige!).
  Hvorfor er $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ikke diagonaliserbar ? Er svaret overraskende ?

MapleTA: Regn **Lay5.2TF**. Fortsæt med **diagonalisering1**; regn den mange gange til du får det hele rigtigt !

- **11.15–12.00:** Vi gennemgår mere om sætning 5.3.5: bevis, eksempler, anvendelser.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

Som det sidste nye begreb i kurset indførtes sidste gang at matricen $A_{n,n}$ kaldes *diagonaliserbar*, dersom man kan skrive $A = PDP^{-1}$ for en passende diagonalmatrix $D_{n,n}$ og en inverterbar matrix $P_{n,n}$; dvs. hvis A er *similær* med en diagonalmatrix. Vi vist følgende:

Hovedsætning 4. For en $n \times n$-matrix A er følgende egenskaber ensbetydende:

(1) A er diagonaliserbar (dvs. $A = PDP^{-1}$ for en diagonalmatrix D);

(2) $\mathbb{R}^n$ har en basis $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ af egenvektorer for A;

(3) A har n lineært uafhængige egenvektorer.

I bekræftende fald er D's diagonalelementer *egenværdier* for A, og P har A's *egenvektorer* som søjler, med samme rækkefølge som i D; dvs. for

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \qquad P = [v_1\ v_2\ \dots\ v_n]$$

gælder mere præcist at $Av_j = \lambda_j v_j$ for $j = 1, \dots, n$.
(NB ! Mao. kommer hverken D eller P ud af den blå luft her !)

Desuden **ER** A diagonaliserbar, dersom enten

- A har n forskellige egenværdier, eller
- A er symmetrisk, dvs. $A^T = A$, og i så fald kan $A = PDP^{-1}$ opnås med en ortogonal matrix P, dvs. at $P^T = P^{-1}$ (**"Spektralsætningen"**).

Det første af disse resultater så vi sidste gang. Spektralsætningen nævnes blot som en oplysning om et af de større resultater, der ligger uden for pensum (se evt. kapitel 7.1 i Lay) — den er forbløffende fordi man kan godtgøre diagonaliserbarheden uden regninger, det kan jo ses med det blotte øje når A er symmetrisk !

15. gang, mandag den 5 maj. Vi har følgende **atypiske** program:

- **8.15–10.00:** Forelæsning over resten af kapitel 5.3 med hovedvægt på sætning 7 om tilfældet med multiple egenværdier. Desuden et par eksempler, blandt andet på spektralsætningen nævnt ovenfor.
- **10.00(ca.)-12.00** Opgaveregning i

  Diagonalisering: Regn prøveopgave nr. 7 fra den mundtlige eksamen, se
  `http://tnb.aau.dk/stud_info/eksamen/proeveopgaver/2007_08/`

  Desuden opgave 5.3.24+25+26 (nemme!) og 5.3.27+28.

  Anvendelser: Regn hele prøveopgaven ovenfor!

  MapleTA: Regn **Lay5.3TF, matrixligning1** og øv dig videre på **Lay5supplTF** samt endelig **teori opgaver A**, der går på tværs af hele pensum !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 1

I Matematisk regne- og fremlæggelsesteknik 2 (MR2) vil vi træne jer i *problemløsning og ræsonnering*. Programmet er:

Torsdag den 29. maj 2008: Vi begynder med

12.30–13.30: Opgaveregning i grupperummene (opgaver følger nedenfor).

13.30–14.00: Auditorium 4, introduktion til MR2.

14.00–16.15: Opgaveregning i grupperummene.

Fredag den 30. juni 2008: Vores centrale dag med en test i MapleTA af et eksamenslignende sæt.

8.15–8.45: Auditorium 1, kort om dagens program.

8.45–12.00: Opgaver i grupperummene.

12.30–13.00: Auditorium 1, introduktion til MapleTA-testen, herunder fordeling på computerrummene. NB Der er plads til 60 personer, så ca. halvdelen af jer skal benytte egne computere i grupperummene !

13.00–16.15: MapleTA-test i computerrummene **B144, B233, B348, D316.** (jævnfør ovenfor!) Testen består af et sæt MapleTA spørgsmål, med en tidsgrænse på 3 timer fra start af besvarelsen, og der er kun(!) et forsøg. I modsætning til den rigtige eksamen vil opgavesættet blive rettet af MapleTA med det samme, når I trykker på 'save and quit'. Resultatet vil også umiddelbart være tilgængeligt. (Fra lørdag morgen den 31/5 kan sættet regnes et ubegrænset antal gange.)

Mandag den 2. juni 2008: **8.15–8.30:** Igangsætning i auditorium 1.

8.30–12.00: Opgaveregning i grupperummene.

12.30–13.00: Auditorium 1, opsamling og spørgsmål. Procedure vedr. eksamen.

13.00–16.15: Opgaveregning i grupperummene.

Om eksamen mm: Se på basiswebstedet. Læs også venligst på Arne Jensens websted om **Fokus på fejl**:

- `http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/raad.pdf`

Praktiske bemærkninger: Hjælpelærer bliver Dan, som I kender fra Mat2A.

Opgavelister:

Torsdag 29/5 ser vi på alle 'emneopgaverne' fra MapleTA:

- **matrixligning1,**
- **diagonalisering1,**
- **determinant udvikling1,**
- **determinant1,**
- **teori chapter 1 og 2 version 2,**
- **nulrum1,**
- **soejlerum1,**
- **span1,**
- **elementaer matrix,**
- **invers matrix1,**
- **invers matrix teori 1,**
- **matrix operationer,**
- **matrix multiplikation,**
- **lineær afbildning1,**
- **lineaer (u)afhaengighed1,**
- **matrix vektorligning teori 1,**
- **lineaere ligninger2,**
- **homogen ligning1,**
- **vektorregning1,**
- **raekkeoperationer,**
- **lineaere ligninger1.**

Desuden **teoriopgaver A, quizz1**.
Bruger I den smarteste metode ? Spørg!! (Især ifm. diagonalisering.)

Fredag 30/5 ser vi om formiddagen på opgaver i lineær algebra. Begynd med **prøveopgaverne nr. 2, 4 og 7** fra

`http://tnb.aau.dk/stud_info/eksamen/proeveopgaver/2006_07/matematik2A.html.`

Disse belyser mange centrale emner fra *hele* kurset.

Dernæst laves MapleTA-opgaverne **Chapter1 reviewTF, Lay2supplTF, Lay3supplTF, Lay5supplTF** . Brug dem kvalificeret, dvs. (gæt ej men) regn dem ud fra teorien, så du forstår hvorfor svaret er 'true' eller 'false' ! Spørg !!

Mandag den 2/6 laves opgaver følgende opgaver fra Lay (Splm. x henviser til de supplerende opgaver til kapitel x).

Vælg de emner I har *mest* behov for at styrke jeres viden i:

Eksistens- og entydighed: Splm. 1: 5, 4.
Konsistente systemer: Splm. 1: 7.
Echelonform: Splm. 1: 8, 13.
Lineære transformationer: Splm. 1: 20. Desuden: Afbildningen $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er givet ved $T(x, y) = (a(x + 1) + 2(y - 1), x + (a - 2)^2 y)$. For hvilke $a \in \mathbb{R}$ er T lineær ? Find T's standardmatrix for disse a.

Standardmatricer: Splm. 1: 21 og Splm. 2:8.
Linearkombinationer: 1.3.11+13.
Frembringelse: 1.4.13, 14, 21, 19 og 1.4.37 (begynd f.eks. med 4 erstatninger).
Lineær uafhængighed: Splm. 1: 14, 16, 17, 18, 19.
Basis: 2.8.17+19+20, 36 og 2.9.9, 11.
Koordinater: 2.9.7, 29.
Underrum: Bevis at $\mathrm{Nul}(A_{n,n})$ er et underrum af $\mathbb{R}^n$. Bevis at E_λ, dvs. egenrummet hørende til egenværdien λ, er et underrum af $\mathbb{R}^n$.
Matrixprodukt: 1.4.25 og Splm. 2: 3, 5, 6.
Invers matrix: Splm. 2: 2, 9, 10.
Matrixligninger: Splm. 2: 7, 8, 18.
Injektiv/Surjektiv: 2.8.33+34 og Splm. 1: 4, 22 og Splm. 2: 17.
Nulrum: 2.8.35 og Splm. 2: 16.
Billedrum/Søjlerum: 2.8.23+25 og 2.9.15.
Rangformlen: 2.8.31, 32 og 2.9.21.
Udspændte underrum: 2.9.13.
Determinanter: Splm. 3: 2+4, 5+6 og Splm. 5: 19+20+21
Elementarmatricer: Splm. 2: 15. Desuden: Lad $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Find tre elementarmatricer E_1, E_2, E_3 sådan at $E_3E_2E_1L = I_3$. Gælder der i øvrigt at $L^{-1} = E_3E_2E_1$?
Egenværdiproblemer: 5.1.25+26 og Splm. 5: 2, 3, 4, 5
Egenværdier: 5.1.27, 5.2.19 og Splm. 5: 9, 13 (ignorer rådet).
Egenrum: 5.3.25+26.
Similaritet: 5.2.23, 24.
Diagonaliserbarhed: 5.3.25+26, 27 og Splm. 5: 8, 6.
Diagonalisering: Splm. 5: 18.

Alternativt kan man også regne de tværgående opgaver på

- `http://www.math.aau.dk/~matarne/mat2a/web/matrix.pdf`

Disse er hverken fra Lay eller MapleTA, men gode til repetition.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen