Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[BM] Mål- og integralteori, af Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Jeg regner med at vi gennemgår bogen i sin helhed, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold.

Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, nemlig integrationsteorien. Men det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen af Lebesgues integralbegreb at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette både naturligt og bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke er en delmængde af hverken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$).

På den anden side er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i 'praksis'.

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebegues integralbegreb, som I altså nu skal møde. Men mere om anvendelserne senere.

En tentativ lektionsplan findes på næste side.

Første gang, tirsdag den 5. februar. Vi mødes kl. 8.15 i aud. G5-109, hvor jeg lægger ud med at gennemgå til og med kapitel 1 i [BM]. Siden får I tid til at regne opgaverne til kapitel 0 (næste gang ser vi på dem til kapitel 1).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

(Nedenstående datoer og emner er opdaterederede pér 27. februar.)

Uge	Dato	Seance	Emner
6	5/2	1	kapitel 0+1: Den udvidede reelle akse; summer. Målelige mængder; σ-algebra.
7	12/2	2	kapitel 2: Målelige afbildninger og mål.
9	26/2	3	kapitel 3+4: Mål, "næsten overalt". Integral af positive målelige funktioner.
10	4/3	4	kapitel 4: Integral af reelle og komplekse funktioner.
11	11/3	5	kapitel 4: Majorantsætningen. Afledte målrum. Integral med reel parameter.
12	18/3	6	kapitel 5: Lebeguemålets entydighed. Lokal integrabilitet. Radonmål.
13	25/3	7	kapitel 5: Invarians. Målforhold. Transformationssætningen. Cantors mængde.
14	1/4	8	kapitel 5: Konstruktion af Lebesguemålet på aksen (appendix).
15	8/4	9	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
16	15/4	10	kapitel 6: Anvendelser af Fubinis sætning.
17	22/4	11	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
18	29/4	12	kapitel 7: L_∞. Tæthed af $C_c(\mathbb{R}^k)$ for $1 \leq p < \infty$.
19	6/5	13	kapitel 8: Fouriertransformationen og Schwartzrummet.
20	13/5	14	kapitel 8: Foldning på $\mathbb{R}^k$.
21	20/5	15	kapitel 8: Fourier-Plancherels transformation.

Ændringer kan naturligvis forekomme undervejs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

2. gang, tirsdag den 12. februar. Vi gennemgik kapitel 2 og begrebet mål fra kapitel 3.

I skulle nu være på det rene med:

- *hvis $\mathbb{E}_i$ er en σ-algebra i en mængde X for hvert $i \in I$, da er også $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ en i σ-algebra i X.*
- Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  Noter at $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$; og at $\mathbb{D}$ kaldes et *frembringersystem* for denne algebra.

Dette var hovedingrediensen i opgaverne til kapitel 1. Vedr. opgave 1.6, så skal man nok bruge at metrikken

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \tag{2}$$

giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

3. gang, tirsdag den 26. februar. Fra 8.15 gennemgås resten af kapitel 3 og kapitel 4.1 om Lebesgues integralbegreb.

Ved opgaverne varmer I op med at vise at der, for en vilkårlig afbildning $f\colon X \to Y$ og delmængder af Y, gælder

$$f^{-1}(\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{j\in J} f^{-1}(B_j), \qquad f^{-1}(\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{j\in J} f^{-1}(B_j). \tag{3}$$

Gælder noget tilsvarende for billeder i stedet for urbilleder ?

Afklar hvorvidt polynomier $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\exp$ samt $\sin$ er *målelige*, dvs. Borelfunktioner. Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin konvergenscirkel, målelig ?

Dernæst kan I regne opgaverne 2.1–2.5. Endelig gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Vi fik idag gjort kapitel 3 færdigt og gennemgik side 4.1-4.3.

Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet *nulmængder* til for at holde regnskab med at ting “går galt” i kun “ubetydelige” mængder.

Det anbefales at gruble hjemmefra over eksempel 2.15. Resultatet herfra indgår i den følgende teori, og metoden bruges også i den første opgave (2.6).

Overvej hjemmefra bogens påstand side 4.1 at $f + g$ og cf er $\mathbb{E}$-målelige for alle $f, g \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$. Overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$ fire linier under formel (iv) side 4.3. (Igen er Eksempel 2.15 et af de mulige hjælpemidler.)

4. gang, tirsdag den 4. marts 2008. Vi gennemgår først eksistensdelen af Hovedsætning 4.2 og fortsætter dernæst med afsnit 4.2-3 om integration af reelle og ko,mplekse funktioner. Dog udskydes beviset for Hovedsætning 4.15 til næste gang.

Dernæst er der opgaver i:

målelighed: Opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Man kan søge inspiration i eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

frembringersystemer: Eftervis de vigtige resultater i opgave 2.7 (jvf. opgaven sidste gang om at en holomorf funktion er Borelmålelig på dens konvergens-cirkel(-skive)).

Hvor meget af opgave 1.6 følger heraf ?

mål: opgave 3.6 (+evt. 3.3) og 3.7.

aksiomerne for mål: belyses gennem opgave 3.4; her er m Lebesguemålet, som vi pt. accepterer eksistensen af (ad 2°: Man kan lade $J = \mathbb{R}$). Desuden 3.5+10.

næsten overalt: opgave 3.12+13+14.

fuldstændige mål: Bliver senere et hovedtema, så lav gerne opgave 3.15 nu.

5. gang, tirsdag den 11. marts 2008. Her vil målet (ha, ha!) være at gøre kapitel 4 færdigt; jævnfør lektionsplanen.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 4.1 og 4.2 pånær Lebesgues majorantsætning.

I bedes selv læse om integrabilitet mm. for *komplekse* funktioner. Både definitionen og beviserne udnytter at man først har ordnet tilfældet med reelle funktioner; dette lader sig så anvende på real- og imaginærdelene hver for sig.

Selvom der også for $f\colon X \to \mathbb{C}$ gælder at f er Lebesgueintegrabel hvis og kun hvis $|f|$ er det, så er der dog behov for en særskilt bevisteknik for uligheden

$$|\int_X f\,d\mu| \leq \int_X |f|\,d\mu. \tag{4}$$

Spørg næste gang hvis argumentet er uklart !

Til næste gang bedes I også afklare hjemmefra, om der er uklarheder ifm. Fatous lemma.

5. gang, tirsdag den 11. marts 2008. Vi lægger ud med at gennemgå resten af kapitel 4. Hovedvægten bliver lagt på Lebesgues majorantsætning (4.15). Der er også en række specialtilfælde, vi skal møde; nogle af dem er ret ligetil.

Dernæst laver vi opgaver i

faldgruber: Opgave 4.3.

monotonisætningen: Regn 4.4. (*Vink:* Læs integration af f over $]1,n]$ som integration af $f1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

almen træning: 4.6–9.

modeksempler: Lav opgave 4.12.

Endelig gamle opgaver, især hvis I ikke nåede ret mange fra kapitel 3.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Sidste gang fik vi afsluttet kapitel 4, pånær mål med tætheder og billedmål. Det blev overladt til jer selv at læse om standardeksemplet med definition og behandling af summer via integration mht. tællemålet

$$\sum_{j\in J} a_j = \int_J a_j \, d\mu. \tag{5}$$

Bemærk at man skriver $\ell(J)$ i stedet for $\mathcal{L}(\mathcal{J}, \mathbb{P}(\mathcal{J}), \mu)$; og at man for $J = \mathbb{N}$ har *følgerummet* $\ell = \ell(\mathbb{N})$, som består af alle absolut konvergente talfølger (hvorfor?).

6. gang, tirsdag den 18. marts. Vi gennemgår 4.5 om billedmål og fortsætter med kapitel 5.1 samt udvalgte dele af 5.2–3.

Blandt opgaverne lægger vi ud med 4.41 for at belyse hvordan de gennemgåede sætninger kan anvendes i analyse.

Desuden opgaverne 4.14+19+23+28+29+30+38+39.

7. gang, tirsdag den 25. marts. Vi fortsætter her med gennemgangen af kapitel 5; antageligt når vi til og med 5.7.

For at øve tingene regnes opgaver i

Billedmål: 4.35.

Anvendelse: 4.42 om gammafunktionen (en 'glat' udgave af $n!$).

Lokalt integrable funktioner: 5.8+9+10 (bruges ofte).

σ-klasser: 5.6+7.

Eventuelt gamle opgaver.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Vi fik 8. gang gennemgået kapitel 5.5+7 og Eksempel 5.21. og regnet opgaverne 5.1-2 (hovedsageligt for $k = 1$!), 5.13-15, 5.22(nem) og 5.16.

Vi gav også et bekvemt argument for at *enhver* isometri $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda af formen $T(x) = T(0) + Ox$ for en ortogonal matrix O (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

Pér definition opfylder en isometri T at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$, fordi $T - T(0)$ også er en isometri. For $y = 0$ ses så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \,|\, x \,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \,|\, y \,) \tag{7}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$, og y med $T(y)$, uden at ændre værdien, fås

$$(\, T(x) \,|\, T(y) \,) = (\, x \,|\, y \,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

T er derfor skalarproduktbevarende, og for den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ gælder så at $(\, T(e_j) \,|\, T(e_k) \,) = \delta_{jk}$, hvorfor også $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ er en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$. Af opskrivningen $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ følger nu ved at tage indre produkt med $T(e_k)$ at $\lambda_k = (\, T(x) \,|\, T(e_k) \,)$, og derfor er

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \,|\, T(e_j) \,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \,|\, e_j \,) T(e_j). \tag{9}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, følgelig er $T(x) = Ox$ for en $n \times n$-matrix O. Nu medfører (8) at $O^{\mathrm{t}} O = I$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

9. gang, tirsdag den 8. april. Vi gør først afsnit 5.6 færdigt. Dernæst gennemgås kapitel 6 til og med Tonellis og Fubinis sætninger. Disse omhandler integration over produktmængder, så vi må dog først diskutere emnet *produktmål*.

Til dagens øvelser beskæftiger vi os med følgende emner:

- Transformationssætningen (5.26): Regn 5.24.
- For hvilke $a > 0$ er funktionen $\frac{1}{x(\log x)^a}$ (hvor $x > 2$) integrabel i ∞ ? *Vink:* En stamfunktion kan opskrives ! Bemærk dog at $a = 1$ er et særtilfælde, med en 'anderledes' stamfunktion.
- **Følgeton om Lebesgue-målets eksistens:** Regn 5.3.
- Gamle opgaver.

Man kan også regne opgaverne 5.28+29+31. De er af den slags, der virkelig flytter grænserne for det man ville tro er muligt (eller de belyser hvordan ens intuition kan spille en et puds).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Det bør nok bemærkes, at vi overspringer afsnit 5.8.

Afsnit 5.9 kan læses af de interesserede. Blandt andet godtgør overførslen af Lebesguemålet til et vilkårligt euklidisk rum (som jo kunne være $\mathbb{R}^k$ med en anden ortonormal basis end den kanoniske) at Lebesguemålet m_k i $\mathbb{R}^k$ *ikke* er knyttet til koordinatakserne, som man måske kunne tro fordi v_k er det.

10.gang, tirsdag den 15. april. Fra kl. 8.15 gennemgår vi resten af kapitel 6 med bevis for Tonelli og Fubinis sætninger, og visse af de efterfølgende anvendelser.

Målforhold: Som opvarmning regnes 5.23. *Vink:* kugler er rotationsinvariante !

Produkt-σ-algebraer: Lave 6.2(let) og 6.3.

Følgeton om Lebesguemålet: Regn 5.3 færdig. *Vink:* Punkt (iii) kan eftervises ved at indsætte $E \cup F$ i formlen for $\alpha(A)$ og bruge formlen igen på leddet $\alpha(A \cap (E \cup F))$.

Cantor–Lebesgues funktion: Regn 5.28. (Det vigtigste er at gennemskue trialbrøksudviklingen.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

11. gang, tirsdag den 22. april. Vi gennemgår kapitel 7.1–7.3 om funktionsrummene $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ for $1 \leq p < \infty$ og Hölders og Minkowskis uligheder.

Desuden er der opgaver i:

Produkt sigma-algebra: 6.5, 6.6.

Tonelli og Fubini: 6.14+ 6.19.

Volumen: 6.26.

Følgeton om Lebesguemålet: Regn resten af 5.3 (Vi må snakke om den tællelige forening, men resten kan fås deraf!) og begynd på 5.4 (ikke så svær som 5.3, desuden skulle I nu kunne ane, hvordan eksistensen opnås).

12. gang, tirsdag den 29. april. Først gennemgås resten af kapitel 7.

I øvelserne begynder vi med at eftervise formlen for

Delvis integration: Hvis f og g er to Borel funktioner $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som er integrable på $[a, b]$, da gælder om vilkårlige stamfunktioner $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ og $G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \tag{10}$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x, y) hvor $a \leq x \leq b$ og $a \leq y \leq x$.

Mere Tonelli/Fubini: Regn dernæst 6.28 (og tænk over i hvilken sammenhæng du senest har benyttet dette resultat !).

Desuden 6.21–23.

Om L_p: Regn opg. 7.16 og eftervis formel (1) i kap. 7.2.

Youngs ulighed: Udled denne ud fra kapitel 3 i Rudins bog *Real and complex analysis*. Mere præcist: Indse at (1) $\implies$ (4) $\implies$ (8) $\implies$ “Young”.

Om Lebesguemålet: Regn resten af 5.4+5.5 (overkommeligt nu).

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

13. gang tirsdag den 6. maj. Her gennemgik vi kapitel 7.6, 8.1 og lidt af 8.2. Som opgaver tog vi 7.19, 7.12; 8.4, 8.1 og 7.15 samt 7.10.

14. gang, tirsdag den 13. maj. Fra 12.30 gennemgås kapitel 8.2 og 8.3. Emnerne til opgaverne er :

Fouriertransformationen: Regn 8.2 og 8.10.

Leibnitz' regel: Lav 8.3.

Om L_∞: Regn 7.20 for at se endnu en begrundelse for navnet L_∞.

Tæthed af C_c: Indse at når $F \subset \mathbb{R}^n$ er lukket så gælder der om afstanden til F, dvs. $d(x, F) = \inf\{ \|x - z\| \mid z \in F \}$, at

- $d(x, F) = 0$ netop når $x \in F$;
- Funktionen $x \mapsto d(x, K)$ er Lipschitz-kontinuert med konstant 1.

Regn desuden opgaven 5.17 for at få styr på den sidste egenskab ved Radon-mål. (Jvf. beviset for sætning 7.28.) Brug for eksempel følgende slagplan: Indse først at det rækker at vise anden del af 2°. Vedr. 2° reduceres sagen til opgave 5.16 2°. Denne sidste ting eftervises vha. 5.16 1° og vinket der.

15. gang, tirsdag 20. maj. Her gennemgår vi fra kl. 8.15 først kapitel 8.3 om foldning af funktioner, senere så meget om Fouriertransformationen på L_2 som vi kan nå fra kapitel 8.4.

Bagefter ser vi på opgaverne 8.5+6+8+9 og gamle opgaver.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Pensum og eksamen.

Pensum er det gennemgåede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen "Mål- og integralteori". Dog er afsnittene 5.8–9, 6.5 og appendikset kursoriske.

Til den mundtlige eksamen den 9. juni kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(2) Entydighedssætningen for mål.

(3) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(4) Produktmål.

(5) Tonellis og Fubinis sætninger.

(6) Hölders og Minkowskis uligheder.

(7) Lebesguerummene og deres fuldstændighed.

(8) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(9) Parsevals ligning.

(10) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

Man forventes selv at tale ca. 25 minutter om det trukne emne. Der er 30 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Spørgsmål fra jeres side kan stilles torsdag den 5. juni klokken 12.30. Lokale meddeles senere.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen