Oversigt nr. 1

Lærebogen for kurset er

[BM] Mål- og integralteori, af Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Den kan tilgås via nettet:

`http://www.math.ku.dk/uddannelser/noter/`

Jeg regner med at vi gennemgår det meste af bogen, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold. Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, nemlig det såkaldte Lebesgue-integral.

Det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen, at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette både naturligt og bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke nødvendigvis en delmængde af hverken $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{R}^n$).

På den anden side er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i 'praksis'.

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebesgues integralbegreb, som I altså nu skal møde. Men mere om anvendelserne senere.

En tentativ lektionsplan findes på næste side.

Første gang, mandag den 1. februar. Vi mødes kl. 12.30 i aud. G5–109 og drøfter organiseringen af kurset.

Dernæst vil jeg efter en introduktion gennemgå kapitel 0+1 og kapitel 3 i [BM], samt begynde på begrebet σ-algebra fra kapitel 2. Endelig får I tid til at regne opgaver i emnerne:

summer: Regn opgaverne 0.5-0.10. (Vigtige!)

σ-algebra: Prøv at gennemskue opgave 1.1.

Mål: Regn opgave 3.3 (nem).

(Næste gang ser vi på flere fra kapitel 1 og 3.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Nedenstående datoer og emner er opdaterede pér 28. januar (kan justeres).

Uge	Dato	Seance	Emner
5	1/2	1	kapitel 0+1+3: Den udvidede reelle akse; summer.
			Målelige mængder; σ-algebra. Mål. “Næsten overalt”.
	3/2	2	kapitel 2: Borel funktioner. Målelige afbildninger.
	5/2	3	kapitel 2: Mere om målelighed og urbilleder.
6	8/2	4	kapitel 4: Integral af positive målelige funktioner.
	10/2	5	kapitel 4: Integral af reelle og komplekse funktioner.
	12/2	6	kapitel 4: Majorantsætningen. Afledte målrum.
			Integral med reel parameter.
9	29/2		Selvstudium 1 : Afledte målrum.
10	7/3	7	kapitel 5: Lebeguemålets entydighed. Lokal integrabilitet.
			Radonmål.
11	14/3	8	kapitel 5: Invarians. Målforhold. Transformationssætningen.
			Cantors mængde.
	18/3		Selvstudium 2: Det fuldstændige Lebeguemål (afsnit 5.8).
14	4/4	9	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
15	11/4	10	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
	15/4		Selvstudium 3: L_∞.
16	18/4	11	kapitel 7: Tæthed af $C_c(\mathbb{R}^k)$ for $1 \leq p < \infty$.
17	25/4	12	kapitel 8: Fouriertransformationen og Schwartzrummet.
	29/4		Selvstudium 4: Schwartzrummet i dimension k.
18	2/5	13	kapitel 8: Foldning.
19	9/5	14	kapitel 8: Plancherels sætning.

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- K. B. Athreya, S. N. Lahiri: *Measure theory and probability theory*. Springer 2006.
- R. Ash: *Probability and measure theory*, Academic Press 2000.
- D. S. Kurtz, C. W. Schwartz: *Theories of integration*, 2nd edition, World Scientific 2012.
- G. S. Nelson:*A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration*. American mathematical society, 2015.

I den første af disse er fremstillingen i sit udgangspunkt relativt tæt på tankegangen hos [BM].

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

I går fik vi gennemgået det vigtigste af kapitel 0 og definitionen af mål fra kapitel 3 samt begrebet σ-algebra i kapitel 1, med hovedeksemplet Borel algebraen $\mathbb{B}(X) = \sigma(\mathbb{G})$ når X er et metrisk rum.

Lad mig fremhæve notationen $\mathbb{I}_k$ for systemet af alle standardintervaller i $\mathbb{R}^k$; disse er rektangler som i den j'te retning består af et halvåbent interval $]a_j, b_j]$. Vi fik gennemgået

- Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  NB ! $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$; omvendt siges $\mathbb{D}$ at være et *frembringersystem* for denne algebra.

- at $\mathbb{B}_k = \sigma(\mathbb{I}_k)$ (de facto udledt i teksten side 21 øverst).

- Lemma: *Hvis $\mathbb{E}_i$ er en σ-algebra i en mængde X for hvert $i \in I$, da er også $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ en σ-algebra i X.*

Lemmaet om fællesmængden blev indirekte vist i beviset for sætning 1.2.

2. gang, onsdag den 3. februar, kl. 8–12.. Vi gennemgår resten af kapitel 3 om mål og "næsten overalt". Dernæst påbegyndes kapitel 2 om målelige funktioner og afbildninger.

Desuden er der opgaver om:

σ-algebraer Først opgave 1.4. Generaliser ved at lave 1.5 (hint nedenfor).

Mål: Regn opgave 3.4 og 3.6+7 om hovedeksemplerne B og C.

Frembringersystemer: Opgave 1.2 om Borel algebraen $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1$; og 1.3 om $\mathbb{B}_k$.

PS: I opgave 1.5 inducerer $\mathbb{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ en klassedeling $X = \bigcup_i K_i$ (dvs. disjunkt forening) med højst 2^n mængder. Dette ses induktivt med $n = 1$ klaret i opgave 1.4; en ny mængde A_{n+1} og dens komplementærmængde $X \setminus A_{n+1}$ giver jo anledning til (højst) dobbelt så mange snitmængder. Herved overføres også egenskaben at for hvert i og j er enten $K_i \subset A_j$ eller $K_i \subset X \setminus A_j$.

Hvis $\mathbb{F}$ betegner samtlige foreningsmængder af de højst 2^n mængder i (K_i), så giver simpel kombinatorik at $\mathbb{F}$ højst har 2^{2^n} elementer. $\mathbb{F}$ er født stabil under alle foreningsmængder, men er en σ-algebra fordi $X \setminus \bigcup_{i\in I_0} K_i = \bigcup_{i\notin I_0} K_i \in \mathbb{F}$. Idet $A_j = \bigcup\{K_i \mid A_j \cap K_i \neq \emptyset\} \in \mathbb{F}$ for hvert j, så er $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{F}$, hvorfor $\sigma(\mathbb{A})$ højst har 2^{2^n} elementer. QED

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

I dag fik vi gennemgået resten af kapitel 3 om begrebet mål.

Dog er emnet "næsten overalt" bedst egnet til selvstudium: Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet *nulmængder* til for at holde regnskab med at ting "går galt" i kun "ubetydelige" mængder. Læs om det i 3.2—og verificer påstandene i afsnittets 4.–6. linie !

I afsnit 2.1 fik vi gennemgået til side 26 øverst og eksemplet side 27.

3. gang, fredag den 5. februar. Fra 8.15 gennemgås resten kapitel 2.1 og 2.2–2.4. Om muligt tager vi hul på kapitel 4.1 om Lebesgues integralbegreb.

Opgaverne vedrører mange forskellige emner:

Indikatorfunktioner: Lav 2.1 (nem vha. sætning 2.3 !).

Borelalgebraer: Opgave 1.7 og 1.8 ($\mathbb{Q}$ er tællelig).

Målelighed: Afklar hvorvidt polynomier $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $\exp$ samt $\sin$ er *målelige*, dvs. Borel-funktioner.

Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin åbne konvergenscirkel, målelig ?

Dernæst regnes 2.3 (nem).

Næsten overalt: Regn 3.13.

Vis at aksiomerne for mål har "indbygget" den naturlige svækkelse i opgave 3.10. (Altså: Mængderne behøver blot at være parvis disjunkte *μ-næsten overalt*.)

Den udvidede akse $\overline{\mathbb{R}}$: Regn opgave 1.6.

Vink: Det kan være nyttigt at metrikken

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \tag{2}$$

giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Koncentrerede mål: Gennemsku 3.14.

Mål med vægtfunktion: belyses via opgave 3.8+9.

Nb ! NB !! Opgaverne i de første 4 emner er ret ligetil, så de bør kunne regnes som forberedelse *inden* fredag. Dette anbefales for at I kan sikre jeres fortrolighed med alle de nye begreber.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

Vi fik idag gennemgået resten af kapitel 2, og vi har dermed gjort til og med kapitel 3 færdigt.

Dog må I selv nærstudere det centrale eksempel 2.15. Er det klart i detaljer hvordan måleligheden af mængderne reduceres til det simplere Eksempel 2.11 ?

4. gang, mandag den 8. februar. Her vil vi udlede eksistensen af et integral $\int_X f\,d\mu$ for *enhver* positiv $\mathbb{E}$-målelig funktion f. Vi stiler mod at gennemgå Lebesgue's monotonisætning med bevis og anvendelser, gerne til og med side 52.

Desuden er der opgaver i:

Cirklers målelighed: Forklar hvorfor en cirkelskive S med centrum (x_0, y_0) og radius $r > 0$ har et areal som delmængde af $\mathbb{R}^2$. *Vink:* Vis at S er en Borelmængde ved at inddrage en kontinuert funktion.

Faldgruber: Gennemsku opgave 2.5 (nem).

Regneregler: Udvid sætning 2.12 med at $\frac{1}{f(x)}$ er $\mathbb{E}$-målelig når $f\colon X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelig med $f(X) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Hvad med $\frac{g}{f}$?

Målelighed: Begynd med opgave 2.2. (Ideerne indgår i de formelle definitioner af uafhængige stokastiske variable og betinget middelværdi.)

Dernæst opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Man kan søge inspiration i eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

Frembringersystemer: Eftervis de vigtige resultater i opgave 2.7.

Brug resultatet til at se, at en potensrækkes sumfunktion på konvergenscirklen $B(z_0, \rho)$ er målelig med hensyn til nedarvede Borelalgebra $\mathbb{B}_{B(z_0,\rho)}$.

Er sidste del af opgave 1.6 også en konsekvens af opgave 2.7 ?

Næsten overalt: Opgave 3.12.

Fuldstændighed af mål: Et mål kaldes *fuldstændigt*, hvis alle dets nulmængder tilhører σ-algebraen $\mathbb{E}$. Lær mere om dette begreb i opgave 3.15 (aht. selvstudium 2).

Besked fra Martin Raussen: AUB har netop fået bogen (som nu er i listen på oversigt nr. 1):

- G. S. Nelson:*A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration*. American mathematical society, 2015.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Igår nåede vi til og med Lebesgues monotonisætning og sætning 4.2 om at ombytte sum og integral.

Hjemmeforberedelse: Gennnemsku bogens påstand side 45 at cf er $\mathbb{E}$-$\overline{\mathbb{B}}$-målelig for alle $f \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$. Fortsæt med at $f = \lim_n f_n$ er i $\mathcal{M}^+$. Og find så et argument for at $f + g$ tilhører $\mathcal{M}^+$. Og endelig: fire linier under formel (iv) side 47, overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$.

5. gang, onsdag den 10. februar 2016.. Her vil målet være at nå fra side 51 og igennem kapitel 4.2. (Fredag den 12. februar bliver emnet afsnit 4.3 og 4.7, og et par ord om 4.4–4.6, som er emnet til første selvstudium den 29. februar.)

Desuden laver vi opgaver i

Faldgruber: Opgave 4.3. *Vink:* Tegn gerne grafer !

Monotonisætningen: Regn 4.4. (*Vink:* Læs integration af f over $]1, n]$ som integration af $f 1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

Ombytning af sum og integral: Regn 4.8. (Svarene er "3/4" hhv. "nej".)

Fortsæt med 4.9.

Modeksempler: Lav opgave 4.12 (nem!). Ekstra: Er det væsentligt, at monotonisætningen er formuleret for en *følge ?*

Fuldstændighed af mål: Regn 3.16.

Regn gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

1. selvstudium, mandag den 29. februar.. Her er programmet at I selv studerer de velbeskrevne afsnit 4.4, 4.5 i [BM] om afledte målrum: delrum, tætheder, billedmål. Prøv i hvert afsnit at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Desuden afsnit 4.6 om uendelige summer fra kap. 0, nu fortolket som integraler; og udvidet til reelle og komplekse summander via integraler.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 7

Idag fik vi gennemgået til og med Lebesgues majorantsætning med bevis. Nærstuder selv eksemplerne midt på side 55, og gennemsku deres relation til antagelserne i majorantsætningen—kan disse svækkes ?

I dagens opgave 4.8 finder man at $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$, idet monotonisætningens korollar tillader ombytning af sum og integral.

På den ene side kunne man forestille sig at rækken konvergerer uniformt (hvad der ville tillade ombytningen), og at det måske ville være nok med uniform konvergens for $x \in]0,1[$, idet f.eks. $\{1\}$ er en Lebesgue nulmængde. Kriteriet herfor er, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes N så $n \geq N$ medfører

$$\forall p \in \mathbb{N}\colon \sup_{0<x<1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^{k+1}}{k} < \varepsilon. \tag{3}$$

På den anden side er den endelige sum kontinuert på $[0,1]$, så $\sup_{0<x<1}$ kan erstattes af $\sup_{0\leq x\leq 1}$. Sidstnævnte er et maksimum som antages i $x=1$, idet hver x^{k+1} er voksende, så (3) er derfor ensbetydende med $\forall p\colon \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} < \infty$, hvilket er umuligt for ethvert N. Rækken konvergerer altså *ikke* uniformt—analyse 2 rækker ikke !

6. gang, fredag den 12. februar. Vi runder først majorantsætningen af med kommentarerne på side 57. Dernæst udvider vi begrebet integrabilitet til komplekse funktioner, jvf. afsnit 4.3. Endelig gennemgår vi 4.7 om integral som funktion af parameter—her vil navnlig majorantsætningen være et vigtigt hjælpemiddel.

Som tiden vil tillade det, vil jeg give en oversigt over (visse af) emnerne i afsnit 4.4–4.6, som en forberedelse til jeres selvstudium i uge 7+8 og den 29. februar.

Endelig er der opgaver i:

Integration af positive funktioner: Regn opgave 4.10.

Integrabilitet: Gennemsku 4.14 ! — Og lav 4.22 (nyttig!).

Majorantsætningen: Brug majorantsætningen til at vise at for $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1/n)+1+x^2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Dernæst opgave 4.18.

Prøv så 4.19 (som illustrerer forudsætningerne) og fortsæt med 4.23.

Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 8

Efter selvstudiet den 27. februar skulle I nu gerne være fortrolige med

- mål på og integration over delmængde,
- mål med tæthed,
- billedmål,
- summer som integral mht. tællemålet, $\ell(J)$.

Bemærk at en stokastisk variabel er en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, som studeres i tilknytning til et målrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, hvorved P er et sandsynlighedsmål defineret på σ-algebraen $\mathcal{F}$ i Ω (tilstandsrummet).

Helt generelt er *fordelingen* af f defineret til at være det sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, som er givet ved billedmålet $\mu = f(P)$; f.eks. er $\mu([a,b]) = P(f^{-1}([a,b]))$. Her er μ så i bedste fald defineret på den *stærkeste* σ-algebra i $\mathbb{R}$, som gør f målelig (jvf. opgave 2.2(a)). I en række hovedtilfælde har $\mu = f(P)$ endda tæthed mht. Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, hvis f er normal- eller eksponentialfordelt; jvf. eksempel 4.20.

Som konsekvens af sætning 4.22 har man, når f har middelværdi (dvs. $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$), at der gælder den velkendte formel (hvor $\operatorname{id}(x) = x$)

$$\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f\,dP = \int_\Omega \operatorname{id}\circ f\,dP = \int_{\mathbb{R}} x\,df(P). \tag{4}$$

Højresiden kan yderligere konkretiseres når $f(P)$ har tæthed mht. dx på $\mathbb{R}$.

7. gang, mandag den 7. marts. Her lægges hovedvægten på afsnit 5.1 om entydighedssætingen for mål. Vi går videre med analysens hovedsætning i afsnit 5.2, og med Radonmål i afsnit 5.3, antageligt frem til side 88. (Hovedsætning 5.12 om Radon mål for $k = 1$ er ret flot, men vi har ikke tid til at studere den nærmere.)

For at øve tingene regnes opgaver i

Integration over delmængder: Regn 4.28+29.

Integral med parameter: Regn opgave 4.41.

Anvendelse: 4.42 om gammafunktionen, en 'glat' udgave af $n!$.

Vink: Man kan dele op i 2 integraler ved at indskyde $t = 1$.

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 9

Som forberedelse til næste gang bedes I repetere begrebet billedmål. Regn derfor gerne opgave 4.35 (nem).

8. gang, mandag den 14. marts. Vi skal først møde begrebet Radonmål i afsnit 5.3, som vi tager med videre til studiet af målforhold i kapitel 5.5 (idet 5.4 forbigås): Alt dette vedrører Lebesguemålets specielle egenskaber. Dernæst følger nogle hovedeksempler fra 5.6, især Cantors mængde—et skrækeksempel !

Til dagens øvelser beskæftiger vi os med følgende emner:

σ-klasser: Regn 5.6(nem) og 5.7.

Lokalt integrable funktioner: Lav først både 5.8 og 5.9 (begge bruges ofte).

Regn dernæst 5.13 (nem), og så de velkendte eksempler i opgave 5.9+10.

Udvid dit univers til: For hvilke $a > 0$ er funktionen $\frac{1}{x(\log x)^a}$ (hvor $x > 2$) integrabel i ∞ ?

Vink: En stamfunktion kan opskrives ! (NB. $a = 1$ er et særtilfælde.)

Modeksempler: Regn 5.14.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 10

Eksamensspørgsmål.
På opfordring kommer her en afklaring angående den påtænkte liste af spørgsmål til den mundtlige eksamen i kurset:

(1) Monotonisætningen.

(2) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(3) Majorantsætningen.

(4) Entydighedssætningen for mål.

(5) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(6) Produktmål.

(7) Tonellis og Fubinis sætninger.

(8) Hölders og Minkowskis uligheder.

(9) Lebesguerummene L_p og deres fuldstændighed.

(10) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(11) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

(12) Parsevals ligning.

(13) Lebesguemålet på den reelle akse*.

Det med * markerede emne er kun beregnet for de studerende på 8. semester, som i henhold til deres studieordning skal dokumentere dybere indsigt i emnet.

Man forventes selv at tale ca. 15 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets øvrige emner.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 11

Jacobis transformationsformel i afsnit 5.7 er kursorisk læsning. Sidste gang beviste vi den for *lineære* transformationer ved hjælp af målforholdet og sætning 5.18. Et alment bevis baseret på de gennemgåede dele af teorien findes i afsnit 5.3 af D. W. Stroock: *A concise introduction to the theory of integration* (Birkhäuser 1999).

Afsnit 5.9 bliver også kursorisk, omend det (heller) ikke er uvæsentligt. F.eks. godtgør overførslen af Lebesguemålet til et vilkårligt euklidisk rum (som kunne være $\mathbb{R}^k$ med en anden ortonormal basis end den kanoniske) at Lebesguemålet m_k i $\mathbb{R}^k$ *ikke* er knyttet til koordinatakserne, som man måske kunne tro fordi v_k er det.

Ifm. sætning 5.17 gives her (som lovet) et bekvemt argument for at

> *enhver* isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda af formen
> $T(x) = Ox+a$ for $a \in \mathbb{R}^k$ og en ortogonal matrix O (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

Pér definition opfylder en isometri T at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$ (da $T - T(0)$ også er en isometri) så det rækker at vise den har formen Ox. For $y = 0$ ses så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \,|\, x \,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \,|\, y \,) \tag{6}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$ og y med $T(y)$, uden at ændre værdierne, sluttes heraf at T er skalarproduktbevarende:

$$(\, T(x) \,|\, T(y) \,) = (\, x \,|\, y \,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

For den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ fås så $(\, T(e_j) \,|\, T(e_k) \,) = \delta_{jk}$, hvorfor $\mathbb{R}^k$ også har $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ som ortonormal basis. Så er $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ for visse tal $\lambda_j(x)$, som via indre produkt med $T(e_k)$ ses at være $\lambda_k(x) = (\, T(x) \,|\, T(e_k) \,)$. Substitution heraf viser derfor at

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \,|\, T(e_j) \,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \,|\, e_j \,) T(e_j). \tag{8}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, hvoraf $T(x) = Ox$ for en $n \times n$-matrix O. Nu medfører (7) at $O^{\mathrm{t}} O x = x$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

9. gang, mandag den 4. april. Da Cantors mængde er et vigtigt skrækeksempel, jvf. eksempel 5.22, omtales dette først.

Vi gennemgår dernæst kapitel 6 om eksistensen af *produktmål* til og med bevis for Tonellis og Fubinis sætninger.

NB! Dette er en stor mundfuld, så I opfordres til at orientere jer på siderne 123–133 inden forelæsningen !

Blandt opgaverne ser vi på:

Transformationssætningen 5.26: Regn 5.24.

Invarians: Gennemsku 5.22 !

Målforhold: Som opvarmning regnes 5.23. *Vink:* kugler er rotationsinvariante !

Cantor–Lebesgues funktion: Regn 5.28. (Det vigtigste er at gennemskue trial-brøksudviklingen.)

Produkt-σ-algebraer: Lav 6.2(let) og 6.3.

Opgaverne til de sidste to emner vedrører dagens forelæsning, men jeg vil tro det går an.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 12

Sidste gang nåede vi afsnit 6.1 og 6.2 i alle væsentlige detaljer. Bemærk dog det meget væsentlige resultat i Sætning 6.9 om Lebesgue målet at $m_p \otimes m_q = m_{p+q}$.

10. gang, mandag den 11. april. Vi må først gøre kapitel 6 færdigt med gennemgang af Tonelli og Fubinis sætninger samt et par eksempler.

Dernæst går videre med funktionsrum i kapitel 7. Vi når antageligt til og med afsnit 7.3. (Fuldstændigheden i af snit 7.4 må vi nok udskyde til 11. gang pga. forsinkelsen.)

Desuden er der opgaver i:

Tonelli: 6.14 (om areal mv.) og 6.19 (om nødvendigheden af σ-endelighed).

Volumen: 6.26.

Produktmål: Regn 6.28 (brug π_1, π_2 side 123)—og bemærk, at vi derved får ført sætning 6.9 over til *delmængder* af $\mathbb{R}^k$.

Partiel integration: Eftervis følgende generelle udgave af formlen for partiel integration, hvor funktionerne altså *ikke* antages at være C^1:

Hvis $f, g \in \mathcal{L}([a,b])$, så gælder om vilkårlige stamfunktioner $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt$ og $G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt$ at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \tag{9}$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x, y) hvor $a \le x \le b$ og $a \le y \le x$. (**Tegn trekanten !** og brug indikatorfunktionen for denne.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 13

Som supplement til bogens kapitel 7 om funktionsrum kommer her en oversigt fra en anden synsvinkel.

Først og fremmest ønsker vi at måle *graden* af integrabilitet. Dette gøres ved at indføre klassen $\mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ af målelige funktioner $f \colon X \to \mathbb{C}$, som for et givet $p \in [1, \infty[$ opfylder

$$\int |f|^p \, d\mu < \infty. \tag{10}$$

Motivationen er ret ligetil, hvis μ er et sandsynlighedsmål: Da er $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ hvis og kun den stokastiske variable f har middelværdi, mens $g \in \mathcal{L}_2(\mu)$ gælder netop når den stokastiske variable g har varians. I matematisk analyse spiller (den nedenfor beskrevne variant) $L_2(\mu)$ en afgørende rolle som et grundlæggende Hilbertrum.

Det er ret ligetil at se, at klassen $\mathcal{L}_p(\mu)$ er et vektorrum. Jvf. sætning 7.4. Nu kunne man ønske sig at vise, at vektorrummet $\mathcal{L}_p(\mu)$ endda har en norm givet ved udtrykket

$$\|f\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}. \tag{11}$$

En brugbar konsekvens af dette ville så være, at rummet ville blive et metrisk rum med metrikken $d(f, g) = \|f - g\|_p$. Dernæst kunne man så f.eks. undersøge om rummet er et fuldstændigt metrisk rum.

Som første del af normegenskaben ses at $\|cf\|_p = (\int |c|^p |f|^p \, d\mu)^{1/p} = |c| \|f\|_p$ for enhver skalar $c \in \mathbb{C}$. Næste del kunne være trekantsuligheden, som indebærer at der for alle $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ gælder

$$(\int |f + g|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} \leq (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} + (\int |g|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Dette er kendt som Minkowskis ulighed, men for $p > 1$ er den lidt krævende at vise, så det er en større sætning i integrationsteorien. Jvf. sætning 7.8.

Imidlertid er $\| \cdot \|_p$ generelt kun en *seminorm* på $\mathcal{L}_p$. Der gælder nemlig

$$\|f\|_p = 0 \iff \int |f|^p \, d\mu = 0 \iff |f|^p = 0 \ \mu\text{-n.o.} \iff f = 0 \ \mu\text{-n.o.} \tag{13}$$

Da nulvektoren i $\mathcal{L}_p$ er funktionen $f \equiv 0$, så er dette altså generelt utilstrækkeligt til at sikre at $\| \cdot \|_p$ er en norm. (Der er dog tale om en norm, hvis den tomme mængde er den eneste nulmængde; som f.eks. er tilfældet for tællemålet.) Derved bliver $d(f, g)$ kun en såkaldt pseudometrik på $\mathcal{L}_p$.

Den bredt accepterede udvej i denne situation er at opgive den strenge skelnen mellem funktioner, der kun er forskellige på en μ-nulmængde. Den opblødning har vi under alle omstændigheder, i og med at sådanne funktioner vil have samme integral.

Mere præcist indebærer dette, at vi kalder $f, g: X \to \mathbb{C}$ ækvivalente, og skriver $f \sim g$, dersom $f = g$ μ-n.o. Det er oplagt at $\sim$ er en ækvivalensrelation. Vi fører dernæst $\mathcal{L}_p(\mu)$ over i mængden af ækvivalensklasser, kaldet $L_p(\mu)$:

$$[f] = \{g \mid g \sim f\}, \qquad L_p(X, \mathbb{E}, \mu) = \{[f] \mid f \in \mathcal{L}_p(X, \mathbb{E}, \mu)\}. \tag{14}$$

Algebraisk set bliver også $L_p(\mu)$ et vektorrum med kompositionerne

$$[f] + [g] = [f + g], \qquad c[f] = [cf]. \tag{15}$$

Klasserne på højresiderne ses nemlig let at være uafhængige af valget af repræsentanter på venstre side. (Prøv efter!) Alle 8 aksiomer for et vektorrum ses så umiddelbart at være opfyldt, idet $[0]$ hhv. $[-f]$ virker som nulvektor hhv. modsat vektor.

Hvad så med normen ? Det simplest mulige ville være blot at anvende $\mathcal{L}_p$-seminormen på en repræsentant:

$$\big\|[f]\big\|_p = (\int |f|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p. \tag{16}$$

Dette giver faktisk en afbildning $L_p(\mu) \to [0, \infty[$, for hvis $g \sim f$ for $f, g \in \mathcal{L}_p(\mu)$, dvs. $[f] = [g]$, ja så er $|g|^p = |f|^p$ μ-n.o., hvilket pga. bemærkning 4.16 giver $\int |g|^p \, d\mu = \int |f|^p \, d\mu$, og derfor at værdien i (16) ikke afhænger af valget af repræsentant for akvivalensklassen $[f]$.

I det praktiske arbejde noteres $[f]$ blot som f, idet man lader ækvivalensklassen med f som repræsentant være underforstået. (Med mindre man for præcisionens skyld vil understrege, at man betragter en ækvivalensklasse af funktioner der er ens μ-n.o.) F.eks. skrives i stedet for $\|[f]\|_p$ blot $\|f\|_p$, og 0 i stedet for $[0]$.

Afbildningen $\|\cdot\|_p \colon L_p(\mu) \to [0, \infty[$ er faktisk en norm, idet den opfylder

$$\|cf\|_p = |c| \|f\|_p \tag{17}$$

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \tag{18}$$

$$\|f\|_p = 0 \iff f = 0 \tag{19}$$

Thi trekantsuligheden i (18) er en direkte konsekvens af Minkowskis ulighed i (12), hvor vi kan læse venstre- og højresiderne som funktionsværdierne af $\|\cdot\|_p$ i $[f + g]$, $[f]$ og $[g]$; jvf. (16). Tilsvarende aflæses (17) af observationen foran (12). Endelig vises (19) af biimplikationerne i (13).

Vektorrummet $L_p(\mu)$ har derfor en metrik givet ved $d(f, g) = \|f - g\|_p$ for $1 \leq p < \infty$. Som et meget tilfredstillende resultat er disse metriske rum altid fuldstændige. Dette er kendt som Fischers fuldstændighedssætning, jvf. sætning 7.18, som er en hjørnesten i integrationsteorien og dens anvendelser.

Fuldstændige normerede vektorrum betegnes i litteraturen som Banachrum efter Stefan Banach, som lavede en omfattende analyse af slige rum i slutningen af 1920'erne. Hovedeksemplet på Banachrum er $L_p(X, \mathbb{E}, \mu)$ med $1 \leq p < \infty$ for et vilkårligt målrum $(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Dog er tilfældet $p = 2$ specielt, fordi normen på $L_2(\mu)$ er så venlig at udspringe af det indre produkt, som for vilkårlige $f, g \in L_2(\mu)$ er givet ved

$$(f|g) = \int f(x)\overline{g(x)}\, d\mu(x). \tag{20}$$

Selvom det formelt er klart at $(f|f) = \int |f|^2 d\mu = \|f\|_2^2$, så er det ikke uden videre klart, at integranden $f\overline{g}$ i det indre produkt overhovedet er integrabel for $f, g \in L_2(\mu)$. Dog giver banaliteten $(a - b)^2 \geq 0$ for $a, b \in \mathbb{R}$ at

$$2ab \leq a^2 + b^2, \tag{21}$$

hvoraf man ser at $|f\overline{g}| = |f||g| \leq |f|^2 + |g|^2$ og udleder at $\int |f\overline{g}|\, d\mu < \infty$. I øvrigt vil integrabiliteten også blive en nem konsekvens af Hölders ulighed, jvf. sætning 7.5, som vi blandt andet skal udnytte til at vise Minkowskis ulighed.

Fordi det indre produkt inducerer en norm (som inducerer en metrik), der er fuldstændig, så betegnes $L_2(X, \mathbb{E}, \mu)$ som et Hilbertrum til minde om David Hilbert, der omkring 1910 udførte omfattende analyser af spektralteori på dens slags vektorrum.

3. selvstudium, fredag den 15. april. Her er programmet, at I selv skal nærlæse afsnit 7.5 i [BM] om rummene $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ og $L_\infty(\mu)$. De består af $\mathbb{E}$-målelige funktioner f, der er begrænsede på $X \setminus N$, hvor N er en μ-nulmængde (der afhænger af f).

Tanken med disse rum er groft sagt at overføre så meget af det ovenstående som muligt til tilfældet $p = \infty$—men netop fordi $p = \infty$ er man nødt til at definere rummene og (semi)normen på en helt anderledes måde (uden integration). Dette kræver nok en del opmærksomhed.

Som sædvanlig bør I stille jer selv spørgsmål som:

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Jeg er på mit kontor, hvis der er behov for at stille spørgsmål ifm. afsnit 7.5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 14

Som forberedelse til næste gang bedes I have læst fremstillingen om $\mathcal{L}_p$ og L_p på oversigt nr. 13 i detaljer.

Desuden bedes i repetere begrebet *tæthed* i et metrisk rum: En delmængde A af et metrisk rum (M, d) siges at være (overalt) tæt i M, eller at ligge tæt i M, hvis enhver omegn af et vilkårligt punkt $x \in M$ indholder elementer fra A, dvs.

$$\forall B(x,r)\colon A \bigcap B(x,r) \neq \emptyset. \tag{22}$$

Løseligt betyder dette, at ethvert element kan approximeres vilkårligt godt med elementer fra A.

Mere generelt siges A at være overalt tæt i en delmængde $B \subset M$, hvis enhver omegn af et punkt $y \in B$ skærer A, dvs. at for et $r > 0$ gælder $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$. Dette sidste kan også koges ned til at $A \subset \overline{B}$.

Af definitionen for tæthed af en delmængde i en anden ses det, at mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ ikke bare er tæt i $\mathbb{R}$, men at $\mathbb{Q}$ også ligger tæt i delmængden $\mathbb{I}$ af irrationale tal ! (Sprogbrugen er lidt bizar eftersom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er disjunkte.)

11. gang, mandag den 18. april. Her gennemgår vi resten af kapitel 7. Dels drejer dette sig om Hölders og Minkowskis uligheder samt Fischer fuldstændighedssætning, hvor vi som oftest simplificerer tingene (i sammenligning med noterne) ved at diskutere det normerede vektorrum $L_p(\mu)$. Dels vil vi dække afsnit 7.6 om tæthed af visse funktionsklasser.

Tonelli/Fubini: Lav 6.22 og 6.23.

Om L_p: Regn opg. 7.16. Forsæt med 7.12.

Konvergens i p-middel: Find en normeret følge f_n i $L_p(\mathbb{R})$ som konvergerer punktvis mod nulfunktionen. Omvendt: Angiv en følge g_n i $L_p(\mathbb{R})$ med $\|g_n\|_p \to 0$ for $n \to \infty$ mens $g_n(x)$ er divergent for ethvert $x \in [0, 1]$.

Om L_∞: Definer $f_n(x) = n/(1+n^2x^2)$ og vis at $f_n(x)$ konvergerer punktvis mod $f(x) = 0$ for $x \neq 0$ og $f(0) = \infty$. Vis at $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ og at konvergensen er uniform for $x \neq 0$; og udled heraf at $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$.

Regn 7.19 for at få flere konkrete eksempler.

Lav 7.20 for at se en anden begrundelse for eksponenten ∞.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 15

Sidste gang nåede vi til og med afsnit 7.5.

12. gang, mandag den 25. april. Vi vil først gennemgå lidt fra afsnit 7.6 om tæthed af simple funktioner i L_p. Sætning 7.28 omtales uden bevis af tidsmæssige grunde.

Siden fortsættes med afsnit 8.1-2 om Fouriertransformationen og Schwartzrummet.

Hölders ulighed: Regn 7.15. *Vink:* Skriv r som en konveks kombination af q og s.

Udvid resultatet til $s = \infty$ efter interesse.

Familierum: Nej, det er ikke en hotelreklame ! —Regn opgave 7.13 !!

Fouriertransformationen: Lav 8.1 (nem!).

Tæthed: Godtgør at $\hat{f}(\xi)$ er uniformt kontinuert når $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. (*Vink:* Antag først at f er en kontinuert funktion med kompakt støtte.)

Funktionalanalyse*: Prøv at regne 7.10 og 7.21. (I den videregående teori identificeres dualrummet $(L_p)^*$ med L_q når $p + q = pq$.)

Gamle opgaver hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 16

4. selvstudium: Schwartzrummet i dimension $k \geq 1$..

Her er programmet, at I på egen hånd nærstuderer afsnit 8.2 i noterne for at lære Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ nærmere at kende, når funktionerne afhænger af $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Et par konkrete holdepunkter kunne være følgende:

Multi-indices: Find et multiindex α sådan at $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_3 \partial x_4^3}$ kan skrives helt enkelt som $\partial^\alpha f(x)$. Hvad er længden $|\alpha|$?

Studer notationen omkring multiindekser. Og giv et kort kombinatorisk argument for multinomialformlen (3) side 179 i noterne.

Schwartzrummet: Gennemfør beviset side 179 nederst for at indse at definitionen er ækvivalent med ulighederne i (4).

Hurtigt aftagende funktioner: Efterprøv påstanden side 180 øverst.

Kontroller derefter eksempel 8.5.

Inklusionen $\mathcal{S} \subset L_p$: Overbevis dig selv om at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset L_1(\mathbb{R}^k)$ ved studere argumentet side 180 (midt)–181 i detaljer.

Hvor stor skal man vælge m i (5) for at opnå, at $\mathcal{S} \subset L_p$ for et givet $p > 0$?

Invarians under differentiation og multiplikation: Gennemfør beviset for sætning 8.7, som fortæller hvorledes Fouriertransformationen "ombytter" differentiation og multiplikation på $\mathcal{S}$.

Udled ifm. beviset, at multiplikation med x^α og anvendelse af ∂^β lader $\mathcal{S}$ være invariant, dvs. de sender begge enhver funktion $f \in \mathcal{S}$ over i nye funktioner $x^\alpha f(x)$ og $\partial^\beta f(x)$ tilhørende $\mathcal{S}$.

Vi vil i få brug for disse egenskaber ved $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ i den resterende del af kurset.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 17

Sidste gang fik vi introduceret Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ af hurtigt aftagende funktioner, som er helt fundamentalt for studiet af Fouriertransformationen.

Vi nåede til at formulere Fouriers inversionsformel for Schwartzfunktioner, og deraf udledte vi at Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ er en *bijektion*:

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^k). \tag{23}$$

Det ses i øvrigt let, at også co-Fouriertranformationen $\bar{\mathcal{F}}f(\xi) = \int e^{\mathrm{i}\, x\cdot\xi} f(x)\, dx$ er en bijektion på $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$.

13. gang, mandag den 2. maj. Vi afslutter gennemgangen af afsnit 8.2 med at bevise Fouriers inversionsformel i sætning 8.8 og sætning 8.11 om Parsevals og Plancherels formler for Schwartz-funktioner. (I afsnit 8.4 skal vi senere se, at disse formler endda gælder for vilkårlige L_2-funktioner.)

Dernæst fortsætter vi med *foldning* af funktioner, idet vi stiler mod at gennemgå afsnit 8.3.

Til opgaveregningen ser vi på:

Differentialligninger: Forklar hvorfor $u''(x) + \mathrm{i}\, 2u'(x) - u(x) = f(x)$ har netop en løsning $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, når f er en given Schwartzfunktion. (*Vink:* Begrund at man kan Fouriertransformere begge sider, og anvend dernæst Korollar 8.10.)

Efter interesse: Vis på samme måde, at den partielle differentialligning af fjerde orden

$$\partial^{(2,2)} v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2) = g(x_1, x_2),$$

for en given funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, har eksistens og entydighed af en løsning $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

Fouriertransformation: Regn 8.2.

Fortsæt med 8.4, som viser at Gauss-klokken $e^{-\sigma x^2/2}$ er invariant under Fouriertransformering, op til en konstant faktor.

Multiindices: Brug kombinatorik til at lave opgave 8.3.

Schwartzrummet: Brug Leibniz' regel til at vise, at for $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ så er også produktet fg en Schwartzfunktion.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 18

Sidste gang nåede vi til midten af side 188, idet vi gennemgik det resultat, at $L_1(\mathbb{R}^k)$ er en Banach-algebra med foldning $*$ som multiplikation. (Og at $*$ derimod ikke er en komposition på rummet af integrable funktioner $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)\dots$)

14. gang, mandag den 9. maj. Her gennemgås resten af kapitel 8.3 om foldning og 8.4 om den moderne Fourierteori—integrationsteoriens hovedanvendelse.

En væsentlig trykfejl findes i formellinien lige under midten side 193, hvor $g1_{K_N}$ skal erstattes af $g1_{K_N}f$ begge steder.

Emnerne til opgaverne er :

Fouriertransformationen: Foldning er associativ, dvs. at $(f*g)*h = f*(g*h)$ for funktioner i $L_1(\mathbb{R}^k)$.

Forklar hvordan dette kan vises ved Fouriertransformation: Hvorfor kan $\mathcal{F}$ anvendes på begge sider af ligningen ? Vis så (om muligt) at $\mathcal{F}$ er injektiv på L_1 !

Foldning: Benyt formlen for foldningsintegralet til at vise, at når $A_j = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f_j(x) \neq 0\}$ så gælder der at

$$\{x \in D(f_1 * f_2) \mid f_1 * f_2(x) \neq 0\} \subset A_1 + A_2. \tag{24}$$

Udled evt. heraf at $\operatorname{supp}(f_1 * f_2) \subset \operatorname{supp} f_1 + \operatorname{supp} f_2$ når højresiden er en lukket mængde (er f.eks. tilfældet hvis $\operatorname{supp} f_1$ er kompakt).

Regn også 8.8.

Supplerende egenskaber: Lav 8.10, f.eks. ved at bruge majorantsætningen.

NB ! Husk vi har eksamen fredag den 3. juni !

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 19

Pensum og eksamen.

Pensum er det gennemgåede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen "Mål- og integralteori". Dog er afsnittene 5.3, 5.9, 6.5 og beviserne side 168-169 kursoriske. Appendixet er kun pensum for dem der har krav om udvidet faglig forståelse af emnet.

Til den mundtlige eksamen den 3. juni [NB. Rettet den 31. maj] kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Monotonisætningen.

(2) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(3) Majorantsætningen.

(4) Entydighedssætningen for mål.

(5) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(6) Produktmål.

(7) Tonellis og Fubinis sætninger.

(8) Hölders og Minkowskis uligheder.

(9) Lebesguerummene L_p og deres fuldstændighed.

(10) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(11) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

(12) Parsevals ligning.

(13) Lebesguemålet på den reelle akse*.

Det med * markerede emne er kun beregnet for de studerende på 8. semester, som i henhold til deres studieordning skal dokumentere dybere indsigt i emnet.

Man forventes selv at tale ca. 15 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen