Oversigt nr. 1

Lærebog. I dette kursus følger vi

[BM] *Mål- og integralteori*;
Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Den kan tilgås via nettet:

`http://www.math.ku.dk/uddannelser/noter/`

Jeg regner med at vi gennemgår det meste af bogen, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold. Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, det såkaldte *Lebesgue-integral*.

Introduktion. Det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen, at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, det vil sige $F_j = f^{-1}(\{y_j\})$, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette naturligt—og på den anden side bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke nødvendigvis en delmængde af $\mathbb{R}^n$).

Dog er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i praksis.

Dette vil jeg gerne uddybe: Selvom det ovenstående er ret abstrakt, så vil vi også få glæde af sætningerne ved bestemmelse af konkrete integraler. For eksempel kommer vi til møde sætninger, der tillader ombytning af sum og integral, sådan at man finder at

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \left[\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

NB. Rækken $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n}$ konvergerer **ikke** uniformt på $[0,1]$, så teknikkerne fra Analyse 2 er utilstrækkelige her !

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebesgues integralbegreb, som I altså nu skal møde.

Lektionsplan.

Nedenstående datoer og emner er opdaterede pér 3. februar.

Uge	Dato	Seance	Emner
5	2/2	1	kapitel 0+1+3: Den udvidede reelle akse; summer. Målelige mængder; σ-algebra. Mål. "Næsten overalt".
6	6/2	2	kapitel 2: Borel funktioner. Målelige afbildninger.
	9/2	3	kapitel 2: Mere om målelighed og urbilleder.
7	13/2	4	kapitel 4.1: Integral af positive målelige funktioner.
	16/2	5	kapitel 4.2–3: Integral af reelle og komplekse funktioner. Majorantsætningen.
8	20/2	Selvst. 1	kapitel 4.4–6: Afledte målrum og summer.
	23/2	Selvst. 2	kapitel 5.1, side 81_{10}–83^{11}: Dynkin systemer, alias σ-klasser.
9	27/2	6	kapitel 4.7: Integral med reel parameter. kapitel 5.1: Lebeguemålets entydighed. kapitel 5.2–3: Lokal integrabilitet. Radonmål.
	2/3	7	kapitel 5.4–5: Invarians. Målforhold.
10	6/3	Selvst. 3	kapitel 5.6: Cantors mængde. kapitel 5.7: Transformationssætningen.
	9/3	8	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
11	16/3	9	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
12	20/3	Selvst. 4	kapitel 7.5: Rummet L_∞. kapitel 5.8: Det fuldstændige Lebeguemål.
	23/3	10	kapitel 8.1: Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$. kapitel 8.2: Schwartzrummet (i dimension 1).
13	27/3	Selvst. 5	kapitel 8.2: Schwartzrummet i dimension k.
	30/3	11	kapitel 8: Foldning af funktioner.
14	3/4	Selvst. 6	kapitel 7.6: Approximation i middel.
	6/4	12	kapitel 8.4: Plancherels sætning.

(Ændringer kan forekomme)

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- K. B. Athreya, S. N. Lahiri: *Measure theory and probability theory*. Springer 2006.
- R. Ash: *Probability and measure theory*, Academic Press 2000.
- D. S. Kurtz, C. W. Schwartz: *Theories of integration*, 2nd edition, World Scientific 2012.
- G. S. Nelson:*A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration*. American mathematical society, 2015.

I den første af disse er fremstillingen i sit udgangspunkt relativt tæt på tankegangen hos [BM].

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 2

Første gang, torsdag den 2. februar. Vi mødes kl. 8.15 i aud. G5–109 og drøfter organiseringen af kurset.

Dernæst vil jeg efter en introduktion gennemgå kapitel 0+1 og kapitel 3 i [BM] om mål, samt begynde på begrebet σ-algebra fra kapitel 2.

Endelig får I tid til at regne opgaver i emnerne:

summer: Regn opgaverne 0.5-0.10. (Vigtige!)

σ**-algebra:** Prøv at gennemskue opgave 1.1.

Mål: Regn opgave 3.3 (nem).

NB. Betegnelsen “nem” betyder at opgaven har en kortfattet besvarelse (som kunne være svær at finde for den uerfarne. . .).

Næste gang ser vi på flere fra kapitel 1 og 3.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 3

I går fik vi gennemgået det vigtigste af kapitel 0 og definitionen af mål fra kapitel 3 samt begrebet σ-algebra i kapitel 1, med hovedeksemplet Borel algebraen $\mathbb{B}(X) = \sigma(\mathbb{G})$ når X er et metrisk rum. Se også mine noter på web-siden.

Bemærk notationen $\mathbb{I}_k$ for systemet af alle standardintervaller i $\mathbb{R}^k$; disse er rektangler som i den j'te retning består af et halvåbent interval $]a_j, b_j]$. Vi fik gennemgået

- Sætning 1.2 om at der til hvert system af delmængder $\mathbb{D} \subset X$ findes en mindste σ-algebra, kaldet $\sigma(\mathbb{D})$, indeholdende $\mathbb{D}$.

  NB ! $\sigma(\mathbb{D})$ kaldes σ-algebraen *frembragt* af $\mathbb{D}$. Omvendt, når $\mathbb{E} = \sigma(\mathbb{D})$ siges $\mathbb{D}$ at være et *frembringersystem* for algebraen $\mathbb{E}$.

- at $\mathbb{B}_k = \sigma(\mathbb{I}_k)$ (de facto udledt i teksten side 21 øverst).

- Lemma: *Hvis $\mathbb{E}_i$ er en σ-algebra i en mængde X for hvert $i \in I$, da er også $\bigcap_{i\in I} \mathbb{E}_i$ en σ-algebra i X.*

Lemmaet om fællesmængden blev indirekte vist i beviset for sætning 1.2.

2. gang, mandag den 6. februar, kl. 12.30–16.15. Vi gennemgår resten af kapitel 3 om mål og "næsten overalt". Dernæst påbegyndes kapitel 2 om målelige funktioner og afbildninger.

Desuden er der opgaver om:

σ-algebraer Først opgave 1.1 fra sidste gang, hvis du ikke nåede den. Fortsæt med 1.4.

Generaliser evt. ved at lave 1.5 (hint nedenfor).

Mål: Regn 3.6+7 om hovedeksemplerne B og C. Lav så evt. opgave 3.4.

Frembringersystemer: Opgave 1.2 om Borel algebraen $\mathbb{B} = \mathbb{B}_1$; og 1.3 om $\mathbb{B}_k$.

PS: I opgave 1.5 inducerer $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ en klassedeling $X = \bigcup_i K_i$ (dvs. disjunkt forening) med højst 2^n mængder. Dette ses induktivt med $n = 1$ klaret i opgave 1.4; en ny mængde A_{n+1} og dens komplementærmængde $X \setminus A_{n+1}$ giver jo anledning til (højst) dobbelt så mange snitmængder. Herved overføres også egenskaben at for hvert i og j er enten $K_i \subset A_j$ eller $K_i \subset X \setminus A_j$.

Hvis $\mathbb{F}$ betegner samtlige foreningsmængder af de højst 2^n mængder i (K_i), så giver simpel kombinatorik at $\mathbb{F}$ højst har 2^{2^n} elementer. $\mathbb{F}$ er født stabil under alle foreningsmængder, men er en σ-algebra fordi $X \setminus \bigcup_{i\in I_0} K_i = \bigcup_{i\notin I_0} K_i \in \mathbb{F}$. Idet $A_j = \bigcup\{K_i \mid A_j \cap K_i \neq \emptyset\} \in \mathbb{F}$ for hvert j, så er $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{F}$, hvorfor $\sigma(\mathbb{A})$ højst har 2^{2^n} elementer. QED

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 4

Igår fik vi gennemgået resten af kapitel 3 om begrebet mål.

Dog er emnet “næsten overalt” bedst egnet til selvstudium: Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er begrebet *nulmængder* til for at holde regnskab med at ting “går galt” i kun “ubetydelige” mængder. Læs om det i 3.2—og verificer påstandene i afsnittets 4.–6. linie !

I afsnit 2.1 fik vi gennemgået til og med eksemplet side 27. Dog blev beviset for sætning 2.4 overladt til jer selv at læse.

3. gang, torsdag den 9. februar. Fra 8.15 gennemgås kapitel 2.2–2.4. Disse afsnit vil være afgørende for den videre gennemgang af Lebesgue integralet.

Opgaverne vedrører mange forskellige emner:

Indikatorfunktioner: Lav 2.1 (nem vha. sætning 2.3 !).

Borel algebraer: Lav resten af opgave 1.2, hvis du ikke nåede den sidste gang.

Ellers opgave 1.7 og 1.8 ($\mathbb{Q}$ er tællelig).

Målelighed: Begynd med at bruge definitionerne til at regne 2.3 (nem).

Afklar hvorvidt polynomier, $\exp$ og $\sin$, der alle ses som afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, er *målelige*, dvs. Borel-funktioner.

Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin åbne konvergenscirkel, målelig ?

Næsten overalt: Regn 3.13.

Opgave 3.10: Aksiomerne for mål har “indbygget” den naturlige svækkelse, at mængderne blot behøver at være parvis disjunkte *μ-næsten overalt*.

Den udvidede akse $\overline{\mathbb{R}}$: Regn opgave 1.6.

Vink: Det kan være nyttigt at metrikken $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$ hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Koncentrerede mål: Gennemsku 3.14. (Bruges dagligt i statistik.)

Mål med vægtfunktion: Belyses via opgave 3.8+9.

NB ! Opgaverne i de første 4 emner er ret ligetil, så de bør kunne regnes som forberedelse *inden* torsdag. Dette anbefales for at I kan sikre jeres fortrolighed med alle de nye begreber.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 5

Vi fik igår gennemgået resten af kapitel 2, pånær sætning 2.13.

I må dog selv nærstudere det centrale eksempel 2.15. Mere præcist er antagelsen om f, g, at de er $\mathbb{E}$-$\bar{\mathbb{B}}$-målelige (jvf. side 30 midtpå er denne målelighed ækvivalent med at være målelig med hensyn til den nedarvede σ-algebra på $[0, \infty]$). Indse først at F, G, F_∞, G_∞ er i $\mathbb{E}$—hvorfor er $\{\infty\}$ og $[0, \infty[$ i $\bar{\mathbb{B}}$?

Er det klart i detaljer hvordan måleligheden af mængderne reduceres til det simplere Eksempel 2.11 ? —brug bemærkningen midt på side 30 til at indse, at restriktionerne af f, g er $\mathbb{E}_{F\cap G}$-$\mathbb{B}$-målelige !

4. gang, mandag den 13. februar. Først gennemgås sætning 2.13. Dernæst vil vi udlede eksistensen af $\int_X f\,d\mu$ for *enhver* $\mathbb{E}$-$\bar{\mathbb{B}}$-målelig funktion $f\colon X \to [0, \infty]$. Vi stiler mod Lebesgue's monotonisætning, gerne til og med side 52.

Desuden er der opgaver i:

Cirklers målelighed: Forklar hvorfor en cirkelskive S med centrum (x_0, y_0) og radius $r > 0$ har et areal som delmængde af $\mathbb{R}^2$. *Vink:* Vis at S er i $\mathbb{B}_2$ ved at inddrage en kontinuert funktion.

Faldgruber: Gennemsku opgave 2.5 (nem).

Regneregler: Udvid sætning 2.13 med at den komplekst konjugerede $\bar{f}$ er målelig.

Udvid dernæst sætning 2.12 med at $\frac{f(x)}{g(x)}$ er $\mathbb{E}$-målelig når $f, g\colon X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelige med $g(X) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Brug følgende slagplan:

- Vis først at $\frac{1}{g}$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}$-målelig, når $g(x) > 0$ for alle $x \in X$.
- Udled så at $\frac{1}{g}$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}_2$-målelig, når g er komplex med $g(x) \neq 0$ for alle $x \in X$. (Udnyt at $\bar{g}$ også er målelig.)
- Vis så at $\frac{f}{g}$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}_2$-målelig, når $g(x) \neq 0$ for alle $x \in X$.

Store og små σ-algebraer: Regn opgave 2.2—ideerne indgår i de formelle definitioner af *uafhængige* stokastiske variable og *betinget* middelværdi.

Næsten overalt: Opgave 3.12.

Konvergens i målelige mængder*: Regn opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Brug eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

Frembringersystemer*: Eftervis de vigtige resultater i opgave 2.7.

Brug resultatet til at se, at en potensrækkes sumfunktion på konvergenscirklen $B(z_0, \rho)$ er målelig med hensyn til nedarvede Borelalgebra $\mathbb{B}_{B(z_0,\rho)}$.

Er sidste del af opgave 1.6 også en konsekvens af opgave 2.7 ?

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 6

Igår nåede vi til og med Lebesgues monotonisætning.

Hjemmeforberedelse: Gennnemsku bogens påstand side 45 at cf er $\mathbb{E}$-$\overline{\mathbb{B}}$-målelig for alle $f \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$. Fortsæt med at $f = \lim_n f_n$ er i $\mathcal{M}^+$. Og find så et argument for at $f + g$ tilhører $\mathcal{M}^+$. (NB. Sætning 2.10 er utilstrækkelig!)

Og endelig: fire linier under formel (iv) side 47, overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$.

Ved opgaverne vil vi benytte sætning 4.16 om at ombytte sum og integral for funktioner i $\mathcal{M}^+$, selvom sætningen først gennemgås 5. gang. (Indholdet er dog ligetil at forstå.)

5. gang, torsdag den 16. februar. Her vil målet være at nå fra side 51 og igennem kapitel 4.3.

Desuden laver vi opgaver i

Faldgruber: Opgave 4.3. *Vink:* Tegn gerne grafer !

Monotonisætningen: Regn 4.4. (*Vink:* Læs integration af f over $]1, n]$ som integration af $f 1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

Ombytning af sum og integral: Regn 4.8. (Svarene er "3/4" hhv. "nej".)

Fortsæt med 4.9.

Modeksempler: Lav opgave 4.12 (nem!). Ekstra: Er det væsentligt, at monotonisætningen er formuleret for en *følge ?*

Regn gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 7

1. selvstudium, mandag den 20. februar. Her er programmet at I selv studerer de velbeskrevne afsnit 4.4, 4.5 i [BM] om *afledte* målrum, altså nye målrum ud fra gamle:

- delrum,
- tætheder,
- billedmål. (Bemærk Eks. 4.23 om *fordelingen* af en stokastisk variabel.)

Prøv i hvert afsnit at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Desuden afsnit 4.6 om uendelige summer $\sum_{j\in J} a_j$ fra kap. 0, nu fortolket som integraler med hensyn til tællemålet på J—og udvidet til reelle og komplekse summander a_j via integraler. Bemærk, at mængden af de summerbare familier $(a_j)_{j\in J}$ (= de integrable funktioner på J) skrives som $\ell(J)$.

2. selvstudium, torsdag den 23. februar. Her bedes i læse i kapitel 5.1, nærmere bestemt side 81_{10}–83^{11}, om begrebet σ-klasser, eller Dynkin systemer.

Hovedtemaet er dette: Hvornår er en σ-klasse $\mathbb{D}$ faktisk en σ-algebra ? Svaret er at $\mathbb{D}$ skal være fællesmængdestabil (side 82 øverst). Overraskende nok er det endda tilstrækkeligt, at $\mathbb{D}$ har et frembringersystem, som er fællesmængdestabilt. Se Fundamentallemma 5.3, og studer dets bevis.

Vi får glæde af Fundamentallemma 5.3 straks i forelæsningen den 6. gang, hvor vi skal vise "entydighedssætningen for mål", som er et af kursets højdepunkter.

Fundamentallemma 5.3 er også kendt i litteraturen om stokastiske variable som "Dynkin's π-λ-theorem". Dette indgår i ræsonnementer om at de variable X og Y er *ens i fordeling* eller om de er *uafhængigt fordelte*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 8

Sidste gang fik vi gennemgået til og med Lebesgues majorantsætning med bevis. Nærstuder selv eksemplerne midt på side 55, og gennemsku deres relation til antagelserne i majorantsætningen—kan disse svækkes ?

Afsnit 4.3 om komplekse funktioner handler næsten udelukkende om at føre alting (både definitioner og sætninger) tilbage til det reelle tilfælde i afsnit 4.2. Det blev derfor overladt til jer selv at læse.

I opgave 4.8 fra sidste gang finder man $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$, idet monotonisætningens korollar tillader ombytning af sum og integral.

På den ene side kunne man forestille sig at rækken konvergerer uniformt (hvad der ville tillade ombytningen), og at det måske ville være nok med uniform konvergens for $x \in]0,1[$, idet f.eks. $\{1\}$ er en Lebesgue nulmængde.

På den anden side er kriteriet herfor, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes N så

$$n \geq N \implies \forall p \in \mathbb{N}\colon \sup_{0<x<1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^{k+1}}{k} < \varepsilon. \tag{2}$$

Men den endelige sum er kontinuert på $[0,1]$, så $\sup_{0<x<1}$ kan erstattes af $\sup_{0\leq x\leq 1}$. Sidstnævnte er et maksimum som antages i $x = 1$, idet hver x^{k+1} er voksende, så (2) er derfor ensbetydende med $\forall p\colon \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} < \infty$, hvilket er umuligt for ethvert N.

Rækken i (2) konvergerer altså *ikke* uniformt—så analyse 2 rækker ikke !

6. gang, mandag den 27. februar. Vi gennemgår 4.7 om integral som funktion af parameter—her vil navnlig majorantsætningen være et vigtigt hjælpemiddel. Dernæst fortsætter vi med entydighedssætningen for mål i afsnit 5.1, 5.2 og lidt af 5.3 om Radon mål.

Endelig er der opgaver i:

Integration af positive funktioner: Regn opgave 4.10.

Integrabilitet: Gennemsku 4.14 ! — Og lav 4.22 (nyttig!).

Majorantsætningen: Brug majorantsætningen til at vise at for $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1/n) + 1 + x^2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Dernæst opgave 4.18.

Prøv så 4.19 (som illustrerer forudsætningerne) og fortsæt med 4.23.

Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 9

Efter selvstudiet den 20. februar skulle I nu gerne være fortrolige med

- mål på og integration over delmængde,
- mål med tæthed,
- billedmål,
- summer som integral mht. tællemålet, $\ell(J)$.

Bemærk at en *stokastisk variabel* er en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, som studeres i tilknytning til et målrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, hvorved P er et sandsynlighedsmål ($P(\Omega) = 1$) defineret på σ-algebraen $\mathcal{F}$ i Ω (tilstandsrummet).

Helt generelt er *fordelingen* af f defineret til at være det sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, som er givet ved billedmålet $\mu = f(P)$. F.eks. er

$$\mu([a, b]) = P(f^{-1}([a, b])).$$

Her er μ så i bedste fald defineret på den *stærkeste* (=største) σ-algebra i $\mathbb{R}$, som gør $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Borel målelig (jvf. opgave 2.2(a)).

I en række hovedtilfælde har $\mu = f(P)$ endda *tæthed* mht. Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, hvis f er normal- eller eksponentialfordelt; jvf. eksempel 4.20.

Som konsekvens af sætning 4.22 om billedmål har man, når f har middelværdi, altså når $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, at der gælder den velkendte formel (hvor $\mathrm{id}(x) = x$)

$$\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f\,dP = \int_\Omega \mathrm{id} \circ f\,dP = \int_\mathbb{R} x\,df(P). \tag{3}$$

Mere præcist er den stokastiske variable f integrabel mht. P hvis og kun hvis x er integrabel på $\mathbb{R}$ mht. billedmålet/fordelingen $f(P)$. Sidstnævnte egenskab omtales som at fordelingen $f(P)$ har *første moment*, hvor kriteriet er at $\int_\mathbb{R} |x|\,df(P) < \infty$, og dette er altså ækvivalent med at f selv har middelværdi.

Højresiden af (3) kan gøres mere konkret når $f(P)$ har tæthed mht. dx på $\mathbb{R}$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 10

Vi fik sidste gang gennemgået entydighedsætningen for mål og resten af afsnit 5.1. Desuden tog vi hul på afnit 5.2, hvor vi nåede et gensyn med analysens hovedsætning.

7. gang, torsdag den 2. marts. Her går vi videre med "the Fundamental theorem of calculus, revisited" i afsnit 5.2. Dernæst fortsættes med Radon mål i 5.3 og med et nærmere studium af Lebesgue målets egenskaber i afsnit 5.4–5.5.

For at øve tingene regnes opgaver i

Integration over delmængder: Regn 4.28+29.

Integral med parameter: Regn opgave 4.41.

Lokalt integrable funktioner: Lav først både 5.8 og 5.9 (begge bruges ofte).

Regn dernæst 5.13 (nem), og så de velkendte eksempler i opgave 5.9+10.

Udvid dit univers til: For hvilke $a > 0$ er funktionen

$$\frac{1}{x(\log x)^a} \qquad \text{(for } x > 2\text{)}$$

integrabel i ∞ ?

Vink: En stamfunktion kan opskrives ! (NB. $a = 1$ er et særtilfælde.)

σ-klasser: Regn 5.6 (nem) og 5.7.

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 11

Sidste gang nåede vi de essentielle dele af afsnit 5.5 om målforhold. Mere præcist fik vi formuleret sætning 5.18 om at målforholdet af en inverterbar matrix G er den gruppehomomorfi $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{R}_+$ der er givet ved $\mathrm{mfh}(G) = |\det G|$.

Undervejs benyttede vi os i forbindelsemed sætning 5.17 af kendte ting vedrørende *isometrier* i euklidiske rum. For en fuldstændigheds skyld opsummeres disse her:

Enhver isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda på formen

$$T(x) = Ox + a$$

for en vektor $a \in \mathbb{R}^k$ og en *ortogonal* matrix O (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

Bevis: Pér definition opfylder en isometri T at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$, da $T - T(0)$ også er en isometri; så det rækker at vise den har formen Ox. For $y = 0$ ses så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \mid x \,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \mid y \,) \tag{5}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$ og y med $T(y)$, uden at ændre værdierne, sluttes heraf at T er skalarproduktbevarende:

$$(\, T(x) \mid T(y) \,) = (\, x \mid y \,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

For den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ fås så $(\, T(e_j) \mid T(e_k) \,) = \delta_{jk}$, hvorfor $\mathbb{R}^k$ også har $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ som ortonormal basis.

Så er $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ for visse tal $\lambda_j(x)$, som via det indre produkt med $T(e_k)$ ses at være $\lambda_k(x) = (\, T(x) \mid T(e_k) \,)$. Ved indsættelse heraf ses det at

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \mid T(e_j) \,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \mid e_j \,) T(e_j). \tag{7}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, hvoraf $T(x) = Ox$ for en vis $n \times n$-matrix O. Nu medfører (6) at $O^{\mathrm{t}} O x = x$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

Det er klassisk sprogbrug, at to mængder $A, B \subset \mathbb{R}^k$ kaldes kongruente dersom der findes en isometri T således at $T(A) = B$. Idet $Tx = Ox + a$ som vist ovenfor, så noteres det at a bidrager med en flytning, mens multiplikationen med O både kan give en rotation (for $\det O = 1$) eller en spejling i origo ($O = -I$) eller i en linie derigennem (for $\det O = -1$)—eller i højere dimensioner en blanding af rotation og spejling.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 12

2. selvstudium, mandag den 6. marts.

Cantors mængde er første emne. Dette eksempel har enorm betydning for vores intuition, som får et ordentligt skud for boven—og derfor har det også stor didaktisk betydning.

Cantors mængde F er en Lebesgue nulmængde i enhedsintervallet, $F \subset [0, 1]$. Første overraskelse er at F er *overtællelig*; dvs. ækvipotent med $[0, 1]$ selv, hvilket virker kontra-intuitivt, da $m(F) = 0$ mens $m([0, 1]) = 1$.

Næste overraskelse er at F er både begrænset og lukket (altså kompakt), så F indeholder alle sine grænsepunkter—derfor ligger F altså *ikke* tæt i $[0, 1]$, på trods af at de er ækvipotente !

Læs nærmere i afsnit 5.6 om konstruktionen af F og forklaringen på de understregede egenskaber.

NB. F er nok nemmest at forstå, hvis man også læser om Cantor–Lebesgues funktion $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$. Denne er konstant på hver bid af komplementærmængden $[0, 1] \setminus F$, se de 2 første figurer på Wikipedias side om emnet:

`https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function`

Der er både en (tilnærmet) graf for f, og en animation visende fremgangsmåden.

Jacobis transformationssætning er andet emne. Her kan I gøre følgende:

- Læs side 104 til og med sætning 5.26 for at få et overblik over emnet.
- Regn opgave 5.24 for at se nærmere på tilfældet med overgang til sfæriske koordinater.
- Nærstuder side 96, linie 5–8 for at forstå formlen der. Indse så, at dette beviser Jacobis formel for tilfældet hvor transformationen er en translation, $\varphi = \tau_a$. (Lebesgue integralet er *translationinvariant* på $\mathbb{R}^k$.)
- Imiter ovenstående brug af sætning 4.22 om billedmål, og inddrag sætning 5.18 om målforholdet, til at vise formlen
$$\int_{\mathbb{R}^k} f(Gx)\,dx = |\det G| \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,dx, \qquad G \in \mathrm{GL}_n\,.$$
Indse så at denne formel er det specialtilfælde af Jacobis formel, der fås fra det lineære koordinatskifte $y = Gx$.
- Læs så detaljerne i beviset for sætning 5.18 (inklusive Lemma 5.19, hvis dette er nyt stof).

Et alment bevis for Jacobis transformationsformel, baseret på de gennemgåede dele af teorien, findes i afsnit 5.3 af D. W. Stroock: *A concise introduction to the theory of integration* (Birkhäuser 1999). Det kræver en del matematisk rutine, men anbefales til de interesserede (i nød eller ej).

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 13

8. gang, torsdag den 9. marts.

Vi gennemgår dernæst kapitel 6 om eksistensen af *produktmål* til og med bevis for Tonellis og Fubinis sætninger, om ombytning af integrationsordenen for funktioner i $\mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$ henholdsvis i $\mathcal{L}(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

NB! Dette er en stor mundfuld, så I opfordres til at orientere jer på siderne 123–133 inden forelæsningen !

Blandt opgaverne ser vi på:

Lokal integrabilitet: Regn 5.14. Fortsæt med 5.15.

Invarians: Gennemsku 5.22 !

Integral som funktion af parameter: 4.42 om gammafunktionen, en 'glat' udgave af $n!$.

Produkt-σ-algebraer: Lav 6.2(let) og 6.3.

Opgaverne til de sidste to emner vedrører dagens forelæsning, men jeg vil tro det går an.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 14

Sidste gang nåede vi afsnit 6.1 og 6.2 i alle væsentlige detaljer. Bemærk dog det meget væsentlige resultat i Sætning 6.9 om Lebesgue målet at

$$m_p \otimes m_q = m_{p+q}.$$

Deusden nåede vi Tonellis sætning side 130 om ombytning af integrationsordenen, dog med stort fokus på at forstå indholdet på bekostning af en gennemgang af beviset. Bogens bevis burde være nemt at læse, efter den grundige gennemgang af produktmålets eksistens og entydighed.

9. gang, torsdag den 16. marts. Vi må først gøre kapitel 6 færdigt med gennemgang af Fubinis sætning samt et par eksempler.

Dernæst går videre med funktionsrum i kapitel 7. Vi når antageligt til og med Fischers fuldstændighedssætning i afsnit 7.4.

Desuden er der opgaver i:

Partiel integration: Eftervis følgende generelle udgave af formlen for partiel integration, hvor funktionerne altså *ikke* antages at være C^1:

Hvis $f, g \in \mathcal{L}([a, b])$, så gælder om vilkårlige stamfunktioner

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{og} \qquad G(x) = G(a) + \int_a^x g(t)\,dt$$

at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \tag{8}$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x, y) hvor $a \leq x \leq b$ og $a \leq y \leq x$. (**Tegn trekanten !** og brug indikatorfunktionen for denne.)

Tonelli: Lav 6.14 (om areal mv.). Fortsæt med 6.15.

Nødvendighed af σ-endelighed: Regn 6.19.

Volumen: 6.26.

Produktmål: Regn 6.28 (brug π_1, π_2 side 123). Bemærk, at vi derved som specialtilfælde får ført sætning 6.9 over til *delmængder* af $\mathbb{R}^k$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 15

4. selvstudium, mandag den 20. marts. Her er første del af programmet, at I selv skal nærlæse afsnit 7.5 i [BM] om rummene $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ og $L_\infty(\mu)$. De består af $\mathbb{E}$-målelige funktioner f, der er begrænsede på $X \setminus N$, hvor N er en μ-nulmængde (der afhænger af f).

Tanken med disse rum er groft sagt at overføre så meget af det fra $\mathcal{L}_p$ kendte som muligt til tilfældet $p = \infty$—men netop fordi $p = \infty$ er man nødt til at definere rummene og (semi)normen på en helt anderledes måde (uden integration). Dette kræver nok en del opmærksomhed.

Som sædvanlig bør I stille jer selv spørgsmål som:

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

I kan regne opgave 7.20 for at forstå, hvorfor man har valgt at betegne rummet af essentielt begrænsede funktioner på X med netop symbolet $\mathcal{L}_\infty(\mu)$. (Jo, det har at gøre med grænseovergangen $p \to \infty$...)

Det andet emne er det såkaldte fuldstændige Lebesguemål i afsnit 5.8. Som I kan se der, så kan man udvide Lebesguemålet m_k fra Borelalgebraen $\mathbb{B}_k$ til en større σ-algebra $\mathbb{L}_k$, der fremkommer ved simpelthen at tilføje alle de nulmængder, der ikke er Borelmængder. Fordelen er at alle nulmænderne i $\mathbb{L}_k$ er så venlige at tilhøre $\mathbb{L}_k$. Det resulterende målrum $(\mathbb{R}^k, \mathbb{L}_k, \overline{m}_k)$ siges at være *fuldstændigt*, fordi alle nulmængderne er målelige.

En funktion $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ kaldes Lebesgue målelig, hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{L}_k$ for enhver Borelmængde B, altså hvis f er $\mathbb{L}_k$-$\mathbb{B}_2$-målelig (nb). I litteraturen anføres $[f] \in L_p(\mathbb{R}^k)$ til at være den ækvivalensklasse af *Lebesgue* målelige funktioner, der rummer f. Men bemærk nu sætning 5.29, som udsiger, at enhver sådan klasse $[f]$ faktisk altid rummer en Borel-funktion. Disse er meget mere bekvemme at arbejde med !

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 16

Pensum og eksamen.

Pensum er det gennemgåede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen "Mål- og integralteori". Dog er afsnittene 5.3, 5.9, 6.4 og 6.5 og beviserne side 167–169 kursoriske.

Til den mundtlige eksamen den 6. juni kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Monotonisætningen.

(2) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(3) Majorantsætningen.

(4) Entydighedssætningen for mål.

(5) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(6) Produktmål.

(7) Tonellis og Fubinis sætninger.

(8) Hölders og Minkowskis uligheder.

(9) Lebesguerummene L_p og deres fuldstændighed.

(10) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$.

(11) Foldning på $\mathbb{R}^k$.

(12) Parsevals ligning.

Man forventes selv at tale ca. 15 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets hovedpunkter.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 17

Som forberedelse til næste gang bedes I have læst fremstillingen om $\mathcal{L}_p$ og L_p på dansk i kapitel 6 af mit eget notesæt.

Desuden bedes i repetere begrebet *tæthed* i et metrisk rum: En delmængde A af et metrisk rum (M, d) siges at være (overalt) tæt i M, eller at ligge tæt i M, hvis enhver omegn af et vilkårligt punkt $x \in M$ indholder elementer fra A, dvs.

$$\forall B(x,r)\colon A \bigcap B(x,r) \neq \emptyset. \tag{9}$$

Løseligt betyder dette, at ethvert element kan approximeres vilkårligt godt med elementer fra A.

Mere generelt siges A at være overalt tæt i en delmængde $B \subset M$, hvis enhver omegn af et punkt $y \in B$ skærer A, dvs. at $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ gælder for ethvert $r > 0$. Med andre ord er A tæt i delmængden B dersom $A \subset \overline{B}$.

Af definitionen for tæthed af en delmængde i en anden ses det, at mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ ikke bare er tæt i $\mathbb{R}$, men at $\mathbb{Q}$ også ligger tæt i delmængden $\mathbb{I}$ af irrationale tal ! (Sprogbrugen er lidt bizar eftersom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er disjunkte.)

10. gang, torsdag den 23. marts. Her gennemgår vi resten af kapitel 7, med hovedvægt på Fischers fuldstændighedssætning. Afsnit 7.6 omtales kort.

Dernæst fortsættes med kapitel 8.1 om Fouriertransformationen. Desuden så meget af 8.2 som tiden tillader; her vil hovedvægten dog ligge på tilfældet med dimension $k = 1$ (tilfældet $k > 1$ er henlagt til selvstudium).

Tonelli/Fubini: Lav 6.22 og 6.23.

Hölders ulighed: Regn 7.15 ved at skrive r som konveks kombination af q og s.

Udvid resultatet til $s = \infty$ efter interesse.

Familierum: Nej, det er *ikke* en hotelreklame ! —Regn opgave 7.13 !

Om L_p: Regn opgave 7.16. Fortsæt med 7.12.

Konvergens i p-middel: Find en normeret følge f_n i $L_p(\mathbb{R})$ som konvergerer punktvis mod nulfunktionen.

Omvendt: Angiv en følge g_n i $L_p(\mathbb{R})$ som opfylder $\|g_n\|_p \to 0$ for $n \to \infty$, mens $g_n(x)$ er divergent for ethvert $x \in [0, 1]$.

Om L_∞: Definer $f_n(x) = n/(1 + n^2x^2)$ og vis at $f_n(x)$ konvergerer punktvis mod $f(x) = \infty 1_{\{0\}}$. Vis at $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ og at konvergensen er uniform for $x \neq 0$; og udled heraf at $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$. Konkluder heraf, at L_∞ er et nyttigt rum !

Regn 7.19 for at få flere konkrete eksempler. (Og lav 7.20 for at se en anden begrundelse for eksponenten ∞, hvis du ikke nåede denne i selvstudiet).

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 18

5. selvstudium: Schwartzrummet i dimension $k \geq 1$.

Her er programmet, at I på egen hånd nærstuderer afsnit 8.2 i noterne for at lære Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ nærmere at kende, når funktionerne afhænger af $x = (x_1, \dots, x_k)$.

Et par konkrete holdepunkter kunne være følgende:

Multi-indices: Find et multiindex α sådan at $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_3 \partial x_4^3}$ kan skrives helt enkelt som $\partial^\alpha f(x)$. Hvad er længden $|\alpha|$?

Studer notationen omkring multiindekser. Og giv et kort kombinatorisk argument for multinomialformlen (3) side 179 i noterne.

Schwartzrummet: Gennemfør beviset side 179 nederst for at indse at definitionen er ækvivalent med ulighederne i (4).

Hurtigt aftagende funktioner: Efterprøv påstanden side 180 øverst.

Kontroller derefter eksempel 8.5.

Inklusionen $\mathcal{S} \subset L_p$: Overbevis dig selv om at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset L_1(\mathbb{R}^k)$ ved studere argumentet side 180 (midt)–181 i detaljer.

Hvor stor skal man vælge m i (5) for at opnå, at $\mathcal{S} \subset L_p$ for et givet $p > 0$?

Invarians under differentiation og multiplikation: Gennemfør beviset for sætning 8.7, som fortæller hvorledes Fouriertransformationen "ombytter" differentiation og multiplikation på $\mathcal{S}$.

Udled ifm. beviset, at multiplikation med x^α og anvendelse af ∂^β lader $\mathcal{S}$ være invariant, dvs. de sender begge enhver funktion $f \in \mathcal{S}$ over i nye funktioner $x^\alpha f(x)$ og $\partial^\beta f(x)$ tilhørende $\mathcal{S}$.

Vi vil i få brug for disse egenskaber ved $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ i den resterende del af kurset.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 19

Sidste gang nåede vi til og med sætning 8.6.

11. gang, torsdag den 30. marts. Vi begynder med at gøre afsnit 8.2 færdigt, idet vi fortsætter med sætning 8.8 om Fouriers inversionsformel. Siden gennemgår vi så meget som muligt af afsnit 8.3 om foldning af funktioner.

Fouriertransformationen: Lav 8.1 (nem!).

Regn så 8.2.

Fortsæt med 8.4, som viser at Gauss-klokken $e^{-\sigma x^2/2}$ er invariant under Fouriertransformering, op til en konstant faktor.

Multiindices: Brug kombinatorik til at lave opgave 8.3.

Schwartzrummet: Brug Leibniz' regel til at vise, at for $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ så er også produktet fg en Schwartzfunktion.

Gamle opgaver hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 20

6. selvstudium. Ved dagens selvstudium er programmet afsnit 7.6 i noterne. Her beskrives det hvordan enhver funktion i Lebesgue rummet L_p med $1 \leq p < \infty$ kan tilnærmes vilkårligt godt med både simple funktioner og med kontinuerte funktioner havende kompakt støtte.

Konkret vil jeg foreslå følgende:

- Læs nærmere på oversigt nr. 17 om begrebet tæthed. (Teksten er korrigeret dd.) Dette er til erstatning for den øverste del af noternes side 167.
- Studer sætning 7.27 om tæthed af simple L_p-funktioner (beviset er ret ligetil).
- Regn opgave 7.28 for at dække tilfældet $p = \infty$.
- Læs side 87–88 om rummet C_c af kontinuerte funktioner med kompakt støtte.

  Nærstuder så indholdet af sætning 7.28. Prøv at skrive indholdet op på en formellinie med eksistens- og alkvantorer !
- Prøv at forstå beviset for sætning 7.28. (Tidligere har jeg noteret en trykfejl i bevisets 2. linie hvor der skal stå $\mu(B \setminus K)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon$.)

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 21

Sidste gang nåede vi til midten af side 188, idet vi gennemgik det resultat, at $L_1(\mathbb{R}^k)$ er en Banach-algebra med foldning $*$ som multiplikation. (Og at $*$ derimod ikke er en komposition på rummet af integrable funktioner $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)\dots$)

12. gang, torsdag den 6. april. Her gennemgås resultaterne fra 8.4 om den moderne Fourierteori—integrationsteoriens hovedanvendelse.

Dog har jeg tænkt mig at følge det udleverede notesæt (da beviserne er lange og tunge, inkl. trykfejl i 8.4).

Emnerne til opgaverne er :

Fouriertransformationen: Brug $\mathcal{F}$ til at regne 8.5

Foldning: Regn 8.8.

Supplerende egenskaber: Lav 8.10, f.eks. ved at bruge majorantsætningen.

Differentialligninger: Forklar hvorfor $u''(x) + \mathrm{i}\,2u'(x) - u(x) = f(x)$ har netop en løsning $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, når f er en given Schwartzfunktion. (*Vink:* Begrund at man kan Fouriertransformere begge sider, og anvend dernæst Korollar 8.10.)

Efter interesse: Vis på samme måde, at den partielle differentialligning af fjerde orden
$$\partial^{(2,2)}v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2) = g(x_1, x_2),$$
for en given funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, har eksistens og entydighed af en løsning $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

NB ! Husk vi har eksamen tirsdag den 6. juni !

Med venlig hilsen
Jon