Oversigt nr. 1

Lærebog. I dette kursus følger vi i store træk

[BM] *Mål- og integralteori*;
Christian Berg og Tage Gutmann Madsen, Københavns Universitet, 2001.

Den kan tilgås via nettet:

`http://www.math.ku.dk/uddannelser/noter/`

Jeg regner med at vi gennemgår det meste af bogen, idet den ret nøjagtigt dækker kursets indhold (desuden benyttes et supplerende notesæt, som kan ses på mit web-sted). Bogen giver en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, det såkaldte *Lebesgue-integral*.

Introduktion. Det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis f er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen, at vi tilskriver f følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori f antager værdien y_j, det vil sige $F_j = f^{-1}(\{y_j\})$, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af F_j.

På den ene side er dette naturligt—og på den anden side bemærkelsesværdigt, fordi mængden X kan være vilkårlig (og ikke nødvendigvis en delmængde af $\mathbb{R}^n$).

Dog er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i praksis.

Dette vil jeg gerne uddybe: Selvom det ovenstående er ret abstrakt, så vil vi også få glæde af sætningerne ved bestemmelse af konkrete integraler. For eksempel kommer vi til møde sætninger, der tillader ombytning af sum og integral, sådan at man finder at

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}.$$

NB. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ konvergerer **ikke** uniformt på $[0,1]$, så teknikkerne fra Analyse 2 er utilstrækkelige her !

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynlighedsregningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebesgues integralbegreb, som I altså nu skal møde.

Lektionsplan. Opdateret pér 1. februar.

Uge	Dato	Seance	Emner
5	2/2	1	kapitel 0+1+3: Den udvidede reelle akse; summer. Målelige mængder; σ-algebra. Mål. "Næsten overalt".
6	5/2	2	kapitel 2: Borel funktioner. Målelige afbildninger.
	8/2	3	kapitel 2: Mere om målelighed og urbilleder.
7	12/2	4	kapitel 4.1: Integral af positive målelige funktioner.
	15/2	5	kapitel 4.2–3: Lebesgue-integrabilitet af reelle og komplekse funktioner. Majorantsætningen.
8	19/2	Selvst. 1	kapitel 4.4–6: Afledte målrum. Summer.
	22/2	Selvst. 2	kapitel 5.1, side 81_{10}–83^{11}: Dynkin systemer, alias σ-klasser.
9	1/3	6	kapitel 4.7: Integral med reel parameter. kapitel 5.1: Lebeguemålets entydighed. kapitel 5.2–3: Lokal integrabilitet. Radonmål.
10	8/3	7	kapitel 5.4–5: Invarians. Målforhold.
11	12/3	Selvst. 3	kapitel 5.6: Cantors mængde. kapitel 5.7: Transformationssætningen.
	15/3	8	kapitel 6: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger.
12	22/3	9	kapitel 7: Lebesguerummene L_p og fuldstændighed.
12	23/3	Selvst. 4	kapitel 7.5: Rummet L_∞. kapitel 5.8: Det fuldstændige Lebesguemål.
14	5/4	10	kapitel 8.1: Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^k$. kapitel 8.2: Schwartzrummet (i dimension 1).
15	9/4	Selvst. 5	kapitel 8.2: Schwartzrummet i dimension k.
	12/4	11	kapitel 8.3: Foldning af funktioner.
16	16/4	Selvst. 6	kapitel 7.6: Approximation i middel.
	19/4	12	kapitel 8.4: Plancherels sætning.

(Ændringer kan forekomme)

Mit eget notesæt vil især erstatte bogens tekst i kapitlerne 7 og 8.

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- K. B. Athreya, S. N. Lahiri: *Measure theory and probability theory*. Springer 2006.
- R. Ash: *Probability and measure theory*, Academic Press 2000.
- D. S. Kurtz, C. W. Schwartz: *Theories of integration*, 2nd edition, World Scientific 2012.
- G. S. Nelson:*A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration*. American mathematical society, 2015.

I den første af disse er fremstillingen i sit udgangspunkt relativt tæt på tankegangen hos [BM].

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 2

Første gang, fredag den 2. februar. Vi mødes kl. 12.30 i lok. 5.227, hvor jeg beskriver organiseringen af kurset.

Dernæst vil jeg efter en introduktion gennemgå kapitel 0+1 om begrebet σ-algebra og kapitel 3 i [BM] om mål. Desuden vil vi snuse til målelige afbildninger i kapitel 2.

Endelig får I tid til at regne opgaver i emnerne:

summer: Regn opgaverne 0.5-0.8. (Vigtige!)

σ**-algebra:** Prøv at gennemskue opgave 1.1.

Mål: Regn opgave 3.3 (nem).

Udvidede reelle tal: Regn 0.9 og 0.10 for at blive fortrolig med fordelene ved $\bar{\mathbb{R}}$.

NB. Betegnelsen "nem" betyder at opgaven har en kortfattet besvarelse (som dog kunne være svær at finde for den uerfarne. . .).

Næste gang ser vi på flere fra kapitel 1 og 3.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 3

Idag fik vi gennemgået det vigtigste af kapitel 0 og definitionen af mål fra kapitel 3 samt begrebet σ-algebra i kapitel 1. Se også mine noter på web-siden.

Vi fik også repeteret duallovene:

$$X \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i, \qquad X \setminus (\bigcap_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i. \tag{2}$$

Disse er almen mængdealgebra, og nyttige i beviser og opgaver.

2. gang, mandag den 6. februar, kl. 8.15-12.00. Vi gennemgår resten af kapitel 3, dvs. essensen af "næsten overalt", og færdiggør kapitel 1 fra midten af side 18. Dernæst påbegyndes kapitel 2 om målelige funktioner og afbildninger. (Dette svarer til resten af Ch. 1 og Ch. 2.1 i mit notesæt.)

Desuden er der opgaver om:

σ**-algebraer** Først opgave 1.1 fra sidste gang, hvis du ikke nåede den. Fortsæt med 1.4.

Generaliser ved at lave 1.5 vha. dagens teori (hint nedenfor).

Mål: Regn 3.6+7 om hovedeksemplerne B og C. Dernæst opgave 3.8.

Få belyst axiomerne for mål ved at gennemskue opgave 3.4.

PS: I opgave 1.5 inducerer $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ en klassedeling $X = \bigcup_i K_i$ (dvs. disjunkt forening) med højst 2^n mængder. Dette ses induktivt med $n = 1$ klaret i opgave 1.4; en ny mængde A_{n+1} og dens komplementærmængde $X \setminus A_{n+1}$ giver jo anledning til (højst) dobbelt så mange snitmængder. Herved overføres også egenskaben at for hvert i og j er enten $K_i \subset A_j$ eller $K_i \subset X \setminus A_j$.

Hvis $\mathbb{F}$ betegner samtlige foreningsmængder af de højst 2^n mængder i (K_i), så giver simpel kombinatorik at $\mathbb{F}$ højst har 2^{2^n} elementer. $\mathbb{F}$ er født stabil under alle foreningsmængder, men er en σ-algebra fordi $X \setminus \bigcup_{i \in I_0} K_i = \bigcup_{i \notin I_0} K_i \in \mathbb{F}$. Idet $A_j = \bigcup \{K_i \mid A_j \cap K_i \neq \emptyset\} \in \mathbb{F}$ for hvert j, så er $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{F}$, hvorfor $\sigma(\mathbb{A})$ højst har 2^{2^n} elementer. QED

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 4

Igår fik vi gennemgået essensen af kapitel 3 om emnet "næsten overalt". Dog fik jeg ikke nævnt emnet *nulmængder*. Som det gerne skulle fremgå af kapitel 3.2 (og kursets fortsættelse) er disse til for at holde regnskab med at ting "går galt" i kun "ubetydelige" mængder. Læs om det i 3.2—og verificer påstandene i afsnittets 4.–6. linie !

I afsnit 2.1 fik vi gennemgået til og med eksemplet side 25.

3. gang, torsdag den 8. februar. Fra 8.15 gennemgås resten af kapitel 2.1–2.4. Disse afsnit vil være afgørende for den videre gennemgang af Lebesgue integralet.

Opgaverne vedrører mange forskellige emner:

Næsten overalt: Regn 3.13.

Opgave 3.10: Aksiomerne for mål har "indbygget" den naturlige svækkelse, at mængderne blot behøver at være disjunkte μ-*næsten overalt*. (Nem, se (IV).)

Indikatorfunktioner: Lav 2.1 (nem vha. sætning 2.3 !).

Borel algebraer: Lav først opgave 1.2. Desuden 1.7 og 1.8 ($\mathbb{Q}$ er tællelig).

Målelighed: Begynd med at bruge definitionerne til at regne 2.3 (nem).

Afklar hvorvidt polynomier, $\exp$ og $\sin$, der alle ses som afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, er *målelige*, dvs. Borel-funktioner.

Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin åbne konvergenscirkel, målelig ?

Den udvidede akse $\overline{\mathbb{R}}$: Regn opgave 1.6.

Vink: Det kan være nyttigt at metrikken $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$, hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

Koncentrerede mål: Gennemsku 3.14. (Bruges dagligt i statistik.)

NB ! Opgaverne i de første 4 emner er ret ligetil, så de bør kunne regnes som forberedelse *inden* torsdag. Dette anbefales for at I kan sikre jeres fortrolighed med alle de nye begreber.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 5

Vi fik igår gennemgået kapitel 2, til lige før sætning 2.13.

4. gang, mandag den 12. februar. Først gennemgås sætning 2.13. Dernæst vil vi udlede eksistensen af $\int_X f \, d\mu$ for **enhver** $\mathbb{E}$-$\overline{\mathbb{B}}$-målelig funktion $f \colon X \to [0, \infty]$. Vi stiler mod Lebesgue's monotonisætning, gerne til og med side 51.

Desuden er der opgaver i:

Cirklers målelighed: Forklar hvorfor en cirkelskive S med centrum (x_0, y_0) og radius $r > 0$ har et areal som delmængde af $\mathbb{R}^2$. *Vink:* Vis at S er i $\mathbb{B}_2$ ved at inddrage en kontinuert funktion.

Faldgruber: Gennemsku opgave 2.5—antag gerne at $\mathbb{E} \neq \mathbb{P}(X)$ (nem).

Regneregler: Udvid sætning 2.12 med at $\frac{f(x)}{g(x)}$ er $\mathbb{E}$-målelig når $f, g \colon X \to \mathbb{C}$ er $\mathbb{E}$-målelige med $g(X) \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Vink:* Vis først at $\frac{1}{g}$ er $\mathbb{E}$-$\mathbb{B}$-målelig, når $g(x) > 0$ for alle $x \in X$. Brug så formlen (2.3.5) i mine noter.

Store og små σ-algebraer: Regn opgave 2.2—ideerne her indgår i de formelle definitioner af *uafhængige* stokastiske variable og *betinget* middelværdi.

Næsten overalt: Opgave 3.12.

Konvergens i målelige mængder***:** Regn opgave 2.6 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Brug eksempel 2.15 og sætning 0.1.)

Frembringersystemer***:** Eftervis de vigtige resultater i opgave 2.7.

Brug resultatet til at se, at en potensrækkes sumfunktion på konvergenscirklen $B(z_0, \rho)$ er målelig med hensyn til nedarvede Borelalgebra $\mathbb{B}_{B(z_0,\rho)}$.

Er sidste del af opgave 1.6 også en konsekvens af opgave 2.7 ?

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 6

Igår nåede vi til og med side 49. Lebesgues monotonisætning side 50 blev ikke separat formuleret, men blev dog omtalt som egenskab (iii) i Hovedsætning 4.2.

Særlig hjemmeforberedelse: Gennemsku bogens påstand side 45 at cf er $\mathbb{E}$-$\overline{\mathbb{B}}$-målelig for alle $f \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0, \infty]$.

Fortsæt med at $f = \lim_n f_n$ er i $\mathcal{M}^+$. Og find så heraf et argument for at $f + g$ tilhører $\mathcal{M}^+$. (NB. Sætning 2.10 er utilstrækkelig!)

Endelig: fire linier under formel (iv) side 47, overvej også at $f - s \in \mathcal{M}^+$.

Ved opgaverne vil vi benytte både monotonisætningen og sætning 4.16 om at ombytte sum og integral for funktioner i $\mathcal{M}^+$, selvom sætningen først gennemgås 5. gang. (Indholdet er dog ligetil at forstå.)

5. gang, torsdag den 15. februar. Her vil målet være at nå fra side 50 og igennem kapitel 4.3.

Desuden laver vi opgaver i

Borelfunktion: Vis direkte at $\varphi(x) = \frac{1}{x} \cdot 1_{\mathbb{R}_+}(x)$ er en Borel målelig funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. (Dette kunne indgå i opgaven med målelighed af $\frac{f}{g}$ fra sidste gang.)

Faldgruber: Opgave 4.3, punkt 1. *Vink:* Tegn gerne grafer !

Monotonisætningen: Regn 4.4. (*Vink:* Læs integration af f over $]1, n]$ som integration af $f 1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

Ombytning af sum og integral: Regn 4.8, som vedrører (1) på oversigt nr. 1. (Svarene er "3/4" hhv. "nej" (tag sup-normen af et udsnit).)

Fortsæt med 4.9.

Modeksempler: Lav opgave 4.12 (nem!).

Er det væsentligt, at monotonisætningen er formuleret for en *følge ?*

Regn gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 7

1. selvstudium, mandag den 19. februar. Her er programmet at I selv studerer de velbeskrevne afsnit 4.4, 4.5 i [BM] om *afledte* målrum, altså nye målrum ud fra gamle:

- delrum,
- tætheder,
- billedmål. (Bemærk Eks. 4.23 om *fordelingen* af en stokastisk variabel.)

Prøv i hvert afsnit at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Desuden afsnit 4.6 om uendelige summer $\sum_{j\in J} a_j$ fra kap. 0, nu fortolket som integraler med hensyn til tællemålet på J—og udvidet til reelle og komplekse summander a_j via integraler. Bemærk, at mængden af de summerbare familier $(a_j)_{j\in J}$ (= de integrable funktioner på J) skrives som $\ell(J)$.

2. selvstudium, torsdag den 22. februar. Her bedes i læse i kapitel 5.1, nærmere bestemt side 81_{10}–83^{11}, om begrebet σ-klasser, eller Dynkin systemer.

Hovedtemaet er dette: Hvornår er en σ-klasse $\mathbb{D}$ faktisk en σ-algebra ? Svaret er at $\mathbb{D}$ skal være fællesmængdestabil (side 82 øverst). Overraskende nok er det endda tilstrækkeligt, at $\mathbb{D}$ har et frembringersystem, som er fællesmængdestabilt. Se Fundamentallemma 5.3, og studer dets bevis.

Vi får glæde af Fundamentallemma 5.3 straks i forelæsningen den 6. gang, hvor vi skal vise “entydighedssætningen for mål”, som er et af kursets højdepunkter.

NB. Fundamentallemma 5.3 er også kendt i litteraturen om stokastiske variable som “Dynkin’s π-λ-theorem”. Dette indgår i ræsonnementer om at to stokastiske variable X og Y er *ens i fordeling* eller om de er *uafhængigt fordelte*.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 8

Sidste gang fik vi gennemgået til og med Lebesgues majorantsætning med bevis. Nærstuder selv eksemplerne midt på side 55, og gennemsku deres relation til antagelserne i majorantsætningen—kan disse svækkes ?

Afsnit 4.3 om komplekse funktioner handler næsten udelukkende om at føre alting (både definitioner og sætninger) tilbage til det reelle tilfælde i afsnit 4.2. Det blev derfor overladt til jer selv at læse.

I opgave 4.8 fra sidste gang finder man $\int_0^1 \sum_{n=1}^\infty \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}$, idet monotonisætningens korollar tillader ombytning af sum og integral.

På den ene side kunne man forestille sig at rækken konvergerer uniformt (hvad der ville tillade ombytningen), og at det måske ville være nok med uniform konvergens for $x \in]0,1[$, idet f.eks. $\{1\}$ er en Lebesgue nulmængde.

På den anden side er kriteriet herfor, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes N så

$$n \geq N \implies \forall p \in \mathbb{N}\colon \sup_{0<x<1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^{k+1}}{k} < \varepsilon. \tag{3}$$

Men den endelige sum er kontinuert på $[0,1]$, så $\sup_{0<x<1}$ kan erstattes af $\sup_{0\leq x\leq 1}$. Sidstnævnte er et maksimum som antages i $x = 1$, idet hver x^{k+1} er voksende, så (3) er derfor ensbetydende med $\forall p\colon \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{1}{k} < \infty$, hvilket er umuligt for ethvert N.

Rækken i (3) konvergerer altså *ikke* uniformt—så analyse 2 rækker ikke !

6. gang, torsdag den 1. marts. Vi gennemgår 4.7 om integral som funktion af parameter—her vil navnlig majorantsætningen være et vigtigt hjælpemiddel. Dernæst fortsætter vi med entydighedssætningen for mål i afsnit 5.1, 5.2 og lidt af 5.3 om Radon mål.

Endelig er der opgaver i:

Integration af positive funktioner: Regn opgave 4.10. Evt. 4.9, hvis den ikke blev regnet sidste gang.

Integrabilitet: Gennemsku 4.14 ! — Og lav 4.22 (nyttig!).

Majorantsætningen: Brug majorantsætningen til at vise at for $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1/n) + 1 + x^2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Dernæst opgave 4.18.

Prøv så 4.19 (som illustrerer forudsætningerne) og fortsæt med 4.23.

Desuden gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 9

Efter selvstudiet den 19. februar skulle I nu gerne være fortrolige med

- mål på og integration over delmængde,
- mål med tæthed,
- billedmål,
- summer som integral mht. tællemålet, $\ell(J)$.

Bemærk at en *stokastisk variabel* er en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, som studeres i tilknytning til et målrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, hvorved P er et sandsynlighedsmål ($P(\Omega) = 1$) defineret på σ-algebraen $\mathcal{F}$ i Ω (tilstandsrummet).

Helt generelt er *fordelingen* af f defineret til at være det sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, som er givet ved billedmålet $\mu = f(P)$. F.eks. er

$$\mu([a, b]) = P(f^{-1}([a, b])).$$

Her er μ så i bedste fald defineret på den *stærkeste* (=største) σ-algebra i $\mathbb{R}$, som gør $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Borel målelig (jvf. opgave 2.2(a)).

I en række hovedtilfælde har $\mu = f(P)$ endda *tæthed* mht. Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, hvis f er normal- eller eksponentialfordelt; jvf. eksempel 4.20.

Som konsekvens af sætning 4.22 om billedmål har man, når f har middelværdi, altså når $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, at der gælder den velkendte formel (hvor $\mathrm{id}(x) = x$)

$$\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f\, dP = \int_\Omega \mathrm{id} \circ f\, dP = \int_\mathbb{R} x\, df(P). \tag{4}$$

Mere præcist er den stokastiske variable f integrabel mht. P hvis og kun hvis x er integrabel på $\mathbb{R}$ mht. billedmålet/fordelingen $f(P)$. Sidstnævnte egenskab omtales som at fordelingen $f(P)$ har *første moment*, hvor kriteriet er at $\int_\mathbb{R} |x|\, df(P) < \infty$, og dette er altså ækvivalent med at f selv har middelværdi.

Højresiden af (4) kan gøres mere konkret når $f(P)$ er eksponential- eller normalfordelingen, eller i andre tilfælde hvor $f(P)$ har tæthed mht. dx på $\mathbb{R}$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 10

Vi fik sidste gang gennemgået den vigtige Bemærkning 4.16 i alle detaljer. Dernæst gik vi gennem 4.7 og entydighedsætningen for mål i afsnit 5.1. Desuden fik vi omtalt Borel mål og Radon mål fra side 87.

7. gang, torsdag den 8. marts. Her går vi videre med "the Fundamental theorem of calculus, revisited" i afsnit 5.2. Dernæst fortsættes med (Radon mål i 5.3 og) et nærmere studium af Lebesgue målets egenskaber i afsnit 5.4–5.5.

For at øve tingene regnes opgaver i

Integration over delmængder: Regn 4.28+29.

Integral med parameter: Regn opgave 4.41. (Hensigten er at bestemme et velkendt udtryk for $F(t)$ ved at gå gennem skridtene.)

Lokalt integrable funktioner: Lav først både 5.8 og 5.9 (begge bruges ofte).

Regn dernæst de velkendte eksempler i opgave 5.9+10.

Udvid dit univers til: For hvilke $a > 0$ er funktionen

$$\frac{1}{x(\log x)^a} \qquad \text{(for } x > 2\text{)}$$

integrabel i ∞ ?

Vink: En stamfunktion kan opskrives ! (NB. $a = 1$ er et særtilfælde.)

σ-klasser: Regn 5.6 (nem) og 5.7.

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 11

Idag nåede vi de essentielle dele af afsnit 5.5 om målforhold. Mere præcist fik vi formuleret sætning 5.18 om at målforholdet af en inverterbar matrix G er den gruppehomomorfi $\mathrm{GL}_n \to \mathbb{R}_+$ der er givet ved $\mathrm{mfh}(G) = |\det G|$.

Detaljerne på side 98 må I selv læse, de er ikke dybsindige. Beviset side 99 henlægges til selvstudium 3.

Undervejs idag benyttede vi os ved sætning 5.17 af kendte ting vedrørende *isometrier* i euklidiske rum. For en fuldstændigheds skyld opsummeres disse her:

Enhver isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda på formen

$$T(x) = Ox + a$$

for en vektor $a \in \mathbb{R}^n$ og en *ortogonal* matrix O (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

Bevis: Pér definition opfylder en isometri T at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$, da $T - T(0)$ også er en isometri; så rækker det at vise den har formen Ox. For $y = 0$ ses så at T er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \mid x\,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \mid y\,) \tag{6}$$

og da man i alle normerne kan erstatte x med $T(x)$ og y med $T(y)$, uden at ændre værdierne, sluttes heraf at T er skalarproduktbevarende:

$$(\, T(x) \mid T(y)\,) = (\, x \mid y\,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{7}$$

For den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ fås så $(\, T(e_j) \mid T(e_k)\,) = \delta_{jk}$, hvorfor $\mathbb{R}^n$ også har $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ som ortonormal basis.

Så er $T(x) = \sum \lambda_j T(e_j)$ for visse tal $\lambda_j(x)$, som via det indre produkt med $T(e_k)$ ses at være $\lambda_k(x) = (\, T(x) \mid T(e_k)\,)$. Ved indsættelse heraf ses det at

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \mid T(e_j)\,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \mid e_j\,) T(e_j). \tag{8}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af x, hvoraf $T(x) = Ox$ for en vis $n \times n$-matrix O. Nu medfører (7) at $O^{\mathrm{t}} O x = x$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

Det er klassisk sprogbrug, at to mængder $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kaldes *kongruente* dersom $B = T(A)$ for passende valgt isometri T. Idet $Tx = Ox + a$ som vist ovenfor, så noteres det at a bidrager med en flytning, mens multiplikationen med O både kan give en rotation (for $\det O = 1$) eller en spejling i origo ($O = -I$) eller i en linie derigennem (for $\det O = -1$)—eller i højere dimensioner en blanding af rotation og spejling.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 12

3. selvstudium, mandag den 12. marts.

Cantors mængde er første emne. Dette eksempel har `enorm` betydning for vores intuition, som får et ordentligt skud for boven—og derfor har det også stor didaktisk betydning.

Cantors mængde F er en Lebesgue nulmængde i enhedsintervallet,

$$F \subset [0,1].$$

Første overraskelse er at F er *overtællelig*. Dvs. at F er ækvipotent (jvf. side 22) med $[0,1]$ selv, hvilket virker kontra-intuitivt, da $m(F) = 0$ mens $m([0,1]) = 1$.

Næste overraskelse er at F er både begrænset og lukket (altså kompakt), så F indeholder alle sine grænsepunkter—derfor ligger F altså *ikke* tæt i $[0,1]$, på trods af at de er ækvipotente !

Læs nærmere i afsnit 5.6 om konstruktionen af F og forklaringen på de understregede egenskaber.

NB. F forstås nok nemmest via Cantor–Lebesgues funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Denne er konstant på hver bid af $[0,1] \setminus F$, så $f' = 0$ gælder n.o. selvom f er voksende med $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$! Se gerne de 2 første figurer på

`https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function`

Der er både en (tilnærmet) graf for f, og en animation visende fremgangsmåden.

Jacobis transformationssætning er andet emne. Her kan I gøre følgende:

- Læs side 104 til og med sætning 5.26 for at få et overblik over emnet.
- Regn opgave 5.24 for at se nærmere på skift til sfæriske koordinater.
- Nærstuder side 96, linie 5–8 for at forstå formlen der. Indse så, at dette beviser Jacobis formel for tilfældet hvor transformationen er en translation, $\varphi = \tau_a$. (Lebesgue integralet er *translationinvariant* på $\mathbb{R}^k$.)
- Imiter ovenstående brug af sætning 4.22 om billedmål, og inddrag sætning 5.18 om målforholdet, til at vise formlen

  $$\int_{\mathbb{R}^k} f(Gx)\,dx = |\det G| \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,dx, \qquad G \in \mathrm{GL}_n\,.$$

  Indse så at denne formel er det specialtilfælde af Jacobis formel, der fås fra det lineære koordinatskifte $y = Gx$.
- Læs så detaljerne i beviset for sætning 5.18 (inklusive Lemma 5.19, hvis dette er nyt stof).

Et alment bevis for Jacobis transformationsformel, baseret på de gennemgåede dele af teorien, findes i afsnit 5.3 af D. W. Stroock: *A concise introduction to the theory of integration* (Birkhäuser 1999). Det kræver en del matematisk rutine, men anbefales til de interesserede (i nød eller ej).

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 13

I resten af kurset går vi over til at benytte fremstillingen i mit eget notesæt, hvor vi følger kapitlerne 6–10. Pt. er notesættet opdateret fsv. angår kapitel 6 og 7. (De med * mærkede afsnit er ikke pensum.)

8. gang, torsdag den 15. marts.

Vi gennemgår kapitel 6 om eksistensen af *produktmål* til og med bevis for Tonellis og Fubinis sætninger, om ombytning af integrationsordenen for funktioner i $\mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$ henholdsvis i $\mathcal{L}(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

NB! Dette er en stor mundfuld, så I opfordres til at orientere jer i kapitel 6 inden forelæsningen !

Blandt opgaverne (som stadig tages fra [BM]) ser vi på:

Lokal integrabilitet: Regn 5.13 (nem) og 5.14.

De særligt interessede kan regne 5.15.

Invarians: Gennemsku 5.22 !

Integral som funktion af parameter: 4.42 om gammafunktionen, en 'glat' udgave af $n!$.

Produkt-σ-algebraer: Lav 6.2(let) og 6.3.

Opgaverne til de sidste to emner vedrører dagens forelæsning, men jeg vil tro det går an.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 14

Sidste gang nåede vi afsnit 6.1 om produktmålet $\mu \otimes \nu$ i alle væsentlige detaljer: Vi viste at klassen af σ-endelige målrum er *stabil* under dannelse af produktrum. I må selv læse det meget væsentlige resultat i Sætning 6.1.8 om Lebesgue målet at

$$m_p \otimes m_q = m_{p+q}.$$

Deusden nåede vi i 6.2 Tonellis sætning om ombytning af integrationsordenen, eller rettere gentagen integration af en funktion på et produktrum.

9. gang, torsdag den 22. marts. Vi må først gøre kapitel 6 færdigt med gennemgang af Fubinis sætning samt et par eksempler.

Dernæst går videre med klasssiske uligheder og funktionsrum i mine noters kapitel 7. (Afsnit med * er ikke pensum, men kan læses af de interesserede.)

Desuden er der opgaver (fra [CB]) i:

Partiel integration: Eftervis følgende generelle udgave af formlen for partiel integration, hvor funktionerne altså *ikke* antages at være C^1:

Hvis $f, g \in \mathcal{L}([a,b])$, så gælder om vilkårlige stamfunktioner F og G at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \tag{9}$$

Vink: Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de (x,y) hvor $a \le x \le b$ og $a \le y \le x$. (**Tegn trekanten !** og brug indikatorfunktionen for denne.)

Tonelli: Lav 6.14 (om areal mv.). Fortsæt med 6.15.

Nødvendighed af σ-endelighed: Regn 6.19.

Volumen: 6.26.

Produktmål: Regn 6.28 (brug π_1, π_2 side 123). Bemærk, at vi derved som specialtilfælde får ført sætning 6.9 over til *delmængder* af $\mathbb{R}^k$.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 15

4. selvstudium, fredag den 23. marts. Her er første del af programmet, at I selv skal nærlæse afsnit 7.5 i [BM] om rummene $\mathcal{L}_\infty(\mu)$ og $L_\infty(\mu)$. De består af $\mathbb{E}$-målelige funktioner f, der er begrænsede på $X \setminus N$, hvor N er en μ-nulmængde (der afhænger af f).

Tanken med disse rum er groft sagt at overføre så meget af det fra $\mathcal{L}_p$ kendte som muligt til tilfældet $p = \infty$—men netop fordi $p = \infty$ er man nødt til at definere rummene og (semi)normen på en helt anderledes måde (uden integration). Dette kræver nok en del opmærksomhed.

Som sædvanlig bør I stille jer selv spørgsmål som:

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

I kan regne opgave 7.20 for at forstå, hvorfor man har valgt at betegne rummet af essentielt begrænsede funktioner på X med netop symbolet $\mathcal{L}_\infty(\mu)$. (Jo, det har at gøre med grænseovergangen $p \to \infty$. . .)

Det andet emne er det såkaldte fuldstændige Lebesguemål i afsnit 5.8. Som I kan se der, så kan man udvide Lebesguemålet m_k fra Borelalgebraen $\mathbb{B}_k$ til en større σ-algebra $\mathbb{L}_k$, der fremkommer ved simpelthen at tilføje alle de nulmængder, der ikke er Borelmængder. Fordelen er at alle nulmængderne i $\mathbb{L}_k$ er så venlige at tilhøre denne større σ-algebra $\mathbb{L}_k$. Det resulterende målrum $(\mathbb{R}^k, \mathbb{L}_k, \overline{m}_k)$ siges at være *fuldstændigt*, fordi alle nulmængderne er målelige.

En funktion $f \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{C}$ kaldes Lebesgue målelig, hvis $f^{-1}(B) \in \mathbb{L}_k$ for enhver Borelmængde B, altså hvis f er $\mathbb{L}_k$-$\mathbb{B}_2$-målelig (nb!). [Derimod udgør de $\mathbb{L}_1$-$\mathbb{L}_1$-målelige funktioner en usædvanlig klasse, som ikke indeholder alle de kontinuerte funktioner; jvf. opgave 5.29 4°.]

I litteraturen anføres $[f] \in L_p(\mathbb{R}^k)$ ofte til at være den ækvivalensklasse af *Lebesgue* målelige funktioner, der rummer f. I den anledning bedes i læse sætning 5.29 med bevis. Den udsiger, at enhver sådan klasse $[f]$ faktisk altid rummer en Borel-funktion. Disse er meget mere bekvemme at arbejde med !

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 16

Pensum og eksamen.

Pensum er kapitel 0–5 i det benyttede notesæt af C. Berg og T. Gutmann Madsen “Mål- og integralteori”. Dog er afsnittene 5.3, 5.9 kursoriske. Desuden indeholder pensum også det af undertegnede skrevne notesæt (udleveret via personligt web-sted), nærmere bestemt Chapter 6–10. (Pt. mangler Chapter 10.1 at blive skrevet; hvis dette ikke nås (pga. sygdom eller andet) inden kursets afslutning, så læses efter kapitel 8.1, 8.2 fra “Mål- og integralteori” i stedet for.) De med *markerede afsnit i mit eget notesæt er generelt ikke pensum; men “7.3 Jensen’s inequality” er aftalt som ektra pensum til deltagere på 8. semester.

Til den mundtlige eksamen den 4. juni kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Monotonisætningen.

(2) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(3) Majorantsætningen.

(4) Entydighedssætningen for mål.

(5) Invarians af Lebesguemålet; målforhold.

(6) Produktmål.

(7) Tonellis og Fubinis sætninger.

(8) Hölders og Minkowskis uligheder.

(9) Lebesguerummene L_p og deres fuldstændighed.

(10) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^d$.

(11) Foldning på $\mathbb{R}^d$.

(12) Parsevals ligning.

Man forventes selv at tale ca. 12–15 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets emner.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 17

10. gang, torsdag den 6. april. Her gennemgår vi først kapitel 8.1–8.2 i mit notesæt, med hovedvægt på Fischers fuldstændighedssætning. (Afsnit 8.3 bliver emnet for næste selvstudium.)

Dernæst begynder vi på kapitel 9 om såkaldt *foldning* af funktioner.

Tonelli/Fubini: Lav 6.22 og 6.23.

Om $\mathcal{L}_p$: Regn opgave 7.16. Fortsæt med 7.12.

Om L_∞: Definer $f_n(x) = n/(1 + n^2x^2)$ og vis at $f_n(x)$ konvergerer punktvis mod $f(x) = \infty 1_{\{0\}}$. Vis at $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ og at konvergensen er uniform for $x \neq 0$; og udled heraf at $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ for $n \to \infty$. Konkluder heraf, at L_∞ er et nyttigt rum !

Regn 7.19 for at få flere konkrete eksempler. (Og lav 7.20 for at se en anden begrundelse for eksponenten ∞, hvis du ikke nåede denne i selvstudiet).

Familierum: Nej, dette er *ikke* en hotelreklame ! — regn opgave 7.13.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 18

5. selvstudium, mandag den 9. april. Ved dagens selvstudium er programmet afsnit 8.3 i mine egne noter. Her beskrives det hvordan enhver funktion i Lebesgue rummet L_p med $1 \leq p < \infty$ kan tilnærmes vilkårligt godt med både simple funktioner og med kontinuerte funktioner havende kompakt støtte.

Konkret vil jeg foreslå følgende:

- Læs nærmere nedenfor på denne oversigt om begrebet tæthed. Dette er til uddybning af den øverste del af noternes afsnit 8.3 side 39.
- Studer Lemma 8.3.2 om tæthed af simple L_p-funktioner (beviset er ret ligetil).
- Regn opgave 7.28 i [CB] for at dække tilfældet $p = \infty$. (*Vink:* Approximer først med en fejl på $\varepsilon/2$ ved at udnytte at $M = \|f\|_\infty$ selv er et essentielt overtal for $|f|$.)
- Studer Proposition 8.3.3 om trinfunktioner.
- Læs side 40–41 om rummet C_0^∞ af glatte funktioner med kompakt støtte—bemærk at man faktisk kan angive sådanne funktioner eksplicit, jævnfør formlen (8.3.13).

  Nærstuder så indholdet af Theorem 8.3.5. Prøv at skrive indholdet op på en formellinie med eksistens- og alkvantorer !

Repetition af begrebet *tæthed* i et metrisk rum. En delmængde A af et metrisk rum (M, d) siges at være (overalt) tæt i M, eller at ligge tæt i M, hvis enhver omegn af et vilkårligt punkt $x \in M$ indholder elementer fra A, dvs.

$$\forall B(x,r)\colon\ A \bigcap B(x,r) \neq \emptyset. \tag{10}$$

Løseligt betyder dette, at ethvert element kan approximeres vilkårligt godt med elementer fra A.

Mere generelt siges A at være overalt tæt i en delmængde $B \subset M$, hvis enhver omegn af et punkt $y \in B$ skærer A, dvs. at $B(y,r) \cap A \neq \emptyset$ gælder for ethvert $r > 0$. Med andre ord er A tæt i delmængden B dersom $A \subset \overline{B}$.

Af definitionen for tæthed af en delmængde i en anden ses det, at mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ ikke bare er tæt i $\mathbb{R}$, men at $\mathbb{Q}$ også ligger tæt i delmængden $\mathbb{I}$ af irrationale tal ! (Sprogbrugen er lidt bizar eftersom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er disjunkte.)

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 19

Sidste gang nåede vi til og med afsnit 8.2 i mine noter. Dog blev det overladt til jer selv at læse de sidste 3 korollarer på egen hånd.

Afsnit 8.3 skulle I læse som selvstudium i mandags. Nogle præciseringer er indsat fra midten af side 40 og på side 41. Disse resultater bliver udnyttet kraftigt i kursets sidste forelæsninger.

I bedes også repetere sætning 4.26+28 fra [CB] om differentiation under integraltegnet mm.

11. gang, torsdag den 12. april. Vi begynder med afsnit 9.1–9.2 om foldning og 9.3 om stærk konvergens af translation.

Dernæst fortsætter vi med de elementære ting om Fourier transformationen. Hensigten er at nå sætning 8.2 og 8.6 i [CB], og helst også sætning 8.8 om Fouriers inversionsformel.

Inversionsformlen kræver også at vi stifter bekendtskab med Schartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, der er beskrevet i afsnit 8.2 i [CB]; vi fokuserer på $d = 1$ for simpelhedens skyld. Et dybere kendskab til dette for alle $d \geq 1$ får I ved hjælp af multiindekser i det sidste selvstudium mandag den 16. april.

Opgaverne drejer sig delvist om det nye (håber det går):

Lebesgue rum: Gennemsku 7.17.

L_∞**:** Regn 7.19. Evt. også 7.22.

Konvergens i p-middel: Find en normeret følge f_n i $L_p(\mathbb{R})$ som konvergerer punktvis mod nulfunktionen.

Omvendt: Angiv en følge g_n i $L_p(\mathbb{R})$ som opfylder $\|g_n\|_p \to 0$ for $n \to \infty$, mens $g_n(x)$ er divergent for ethvert $x \in [0, 1]$.

Fouriertransformationen på L_1: Lav 8.1 (nem!).

Regn så 8.2.

Fortsæt med 8.4, som viser at Gauss-klokken $e^{-\sigma x^2/2}$ er invariant under Fouriertransformering, op til en konstant faktor.

Gamle opgaver hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 20

Som opfølgning på dagens opgaver repeteres de klassiske fakta at, for $a, b > 0$,

$$\frac{x^a}{e^{bx}} \to 0 \quad \text{for } x \to \infty; \qquad \frac{(\log y)^a}{y^b} \to 0 \quad \text{for } y \to \infty. \tag{11}$$

Da $(\cdot)^a$ er voksende er det nok at vise at $\frac{x}{e^{xb/a}} \to 0$ for $x \to \infty$, og dette fås fra l'Hôpitals regel fordi $1 \cdot e^{-xb/a} \to 0$ for $x \to \infty$. Substitueres med $x = \log y$ opnås den anden grænseværdi, thi vi har $y \to \infty$ hvis og kun hvis $x \to \infty$.

F.eks. kan man i opgave 7.17 om $f(x) = (\sqrt{x}(1 + |\log x|)^{-1}$ se at $f \notin \mathcal{L}_p$ for $p < 2$, fordi formlen ovenfor giver at $(\log x)^p \leq cx^b$, hvoraf

$$\int |f|^p \, dx \geq \int_e^\infty (\sqrt{x}(2\log x)^{-p} \, dx \geq C \int_e^\infty x^{-(b+p/2)} \, dx = \infty$$

når $b > 0$ er valgt så lille at $b + p/2 < 1$ (jævnfør opgave 7.16).

6. selvstudium, mandag den 16. april: Schwartzrummet i dimension $d \geq 1$.

Her er programmet, at I nærstuderer afsnit 8.2 i [CB] for at lære Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ nærmere at kende, når funktionerne afhænger af $x = (x_1, \ldots, x_d)$.

Et par konkrete holdepunkter kunne være følgende:

Multi-indices: Find et multiindex α sådan at $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_3 \partial x_4^3}$ kan skrives helt enkelt som $\partial^\alpha f(x)$. Hvad er længden $|\alpha|$?

Studer notationen omkring multiindekser. Og giv et kort kombinatorisk argument for multinomialformlen (3) side 179 i noterne.

Schwartzrummet: Gennemfør beviset side 179 nederst for at indse at definitionen er ækvivalent med ulighederne i (4).

Hurtigt aftagende funktioner: Efterprøv påstanden side 180 øverst.

Kontroller derefter eksempel 8.5—brug første del af (11) ovenfor.

Inklusionen $\mathcal{S} \subset L_p$: Overbevis dig selv om at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset L_1(\mathbb{R}^k)$ ved først at indse at (4) medfører (5) side 180 nederst—dernæst kan integrabiliteten af $(1 + |x|^2)^{-m}$ fås fra Example 8.1.2 i mine egne noter via de trivielle

$$1 + |x|^2 \leq (1 + |x|)^2 \leq 4(1 + |x|^2).$$

Hvor stor skal man vælge m i (5) for at opnå, at $\mathcal{S} \subset L_p$ for et givet $p > 0$?

Invarians under differentiation og multiplikation: Gennemfør beviset for sætning 8.7, som fortæller dels hvorledes $\mathcal{F}$ "ombytter" differentiation og multiplikation på $\mathcal{S}$, dels sikrer at $\mathcal{F}$ afbilder $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$ selv.

Udled ifm. beviset, at multiplikation med x^α og anvendelse af ∂^β lader $\mathcal{S}$ være invariant, dvs. de sender begge enhver funktion $f \in \mathcal{S}$ over i nye funktioner $x^\alpha f(x)$ og $\partial^\beta f(x)$ tilhørende $\mathcal{S}$.

Vi vil i få brug for disse egenskaber ved $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ i den resterende del af kurset.

Med venlig hilsen
Jon

Oversigt nr. 21

Sidste gang gennemgik vi foldning af funktioner efter afsnit 9.1–9.3 i mine noter, med hovedvægt på det resultat at $L_1(\mathbb{R}^k)$ er en Banach-algebra med foldning $*$ som multiplikation. (Og at $*$ derimod ikke er en komposition på rummet af integrable funktioner $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k)\dots$)

Desuden gennemgik vi fra [CB] afsnit 8.1–8.2 den elementære teori om Fouriertransformationen og lidt om Schwarzrummet samt sætning 8.8 om Fouriers inversionsformel.

12. gang, torsdag den 19. april. Her gennemgås først side 184 i [CB] om at Fouriertransformationen $\mathcal{F}$ er en *bijektion*:

$$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^k). \tag{12}$$

Dernæst afsnit 9.4–9.5 i mit eget notesæt om approximation med glatte funktioner, og endelig afsnit 10.2 om Parseval–Plancherels sætning, der udsiger at for alle $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ har man at:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\mathcal{F}_2 f(\xi)|^2\,d\xi, \tag{13}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}_2 f(\xi)\overline{\mathcal{F}_2 g(\xi)}\,d\xi. \tag{14}$$

Emnerne til opgaverne er:

Fouriertransformationen: Brug $\mathcal{F}$ til at regne 8.5.

Supplerende egenskaber: Lav 8.10, f.eks. ved at bruge majorantsætningen.

Differentialligninger: Forklar hvorfor $u''(x) + \mathrm{i}\,2u'(x) - u(x) = f(x)$ har netop en løsning $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, når f er en given Schwartzfunktion. (*Vink:* Begrund at man kan Fouriertransformere begge sider, og anvend dernæst Korollar 8.10.)

Efter interesse: Vis på samme måde, at den partielle differentialligning af fjerde orden

$$\partial^{(2,2)} v(x_1, x_2) + v(x_1, x_2) = g(x_1, x_2),$$

for en given funktion $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, har eksistens og entydighed af en løsning $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$.

NB ! Husk vi har eksamen mandag den 4. juni !

Med venlig hilsen
Jon