## Oversigt nr. 1

**Lærebog.** I dette kursus følger vi i store træk mine noter, som I kan finde på moodle-siden. Det vil løbende blive opdateret, så nøjes venligst med at printe små bidder.

Noterne giver (forhåbentlig!) en lettilgængelig indføring i et centralt område af den moderne matematik, det såkaldte *Lebesgue-integral*.

**Introduktion.** Det kunne være nyttigt at give en meget kortfattet beskrivelse af, hvad det hele går ud på: Hvis $f\colon X \to \mathbb{R}$ er en funktion fra en *vilkårlig* mængde, og hvis $f$ er *simpel*, dvs. kun antager endeligt mange værdier $\{y_1, \dots, y_n\}$, så er essensen, at vi tilskriver $f$ følgende integral,

$$\int_X f\,dx = y_1 \cdot m(F_1) + y_2 \cdot m(F_2) + \cdots + y_n \cdot m(F_n). \tag{1}$$

Herved er $F_j \subset X$ den delmængde hvori $f$ antager værdien $y_j$, det vil sige $F_j = f^{-1}(\{y_j\})$, og $m(F_j)$ skal læses som størrelsen ("målet") af $F_j$.

På den ene side er dette naturligt—og på den anden side bemærkelsesværdigt, fordi mængden $X$ kan være vilkårlig (og ikke nødvendigvis en delmængde af $\mathbb{R}^n$).

Dog er det klart at man må give en præcis mening til *målet* $m(F_j)$. Det vil vi gøre en gang for alle i kursets begyndelse, og som I vil få at se er hele det resulterende integralbegreb en konstruktion, som er meget *slagkraftig*. Dette skyldes ganske enkelt at sætningerne er nemmere at bruge i praksis.

Dette vil jeg gerne uddybe: Selvom det ovenstående er ret abstrakt, så vil vi også få glæde af sætningerne ved bestemmelse af *konkrete* integraler.

Eksempelvis kommer vi til møde sætninger, der tillader ombytning af sum og integral, sådan at man finder at

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{x^{n+2}}{n(n+2)}\right]_0^1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{3}{4}. \tag{2}$$

NB. Rækken $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$ konvergerer **ikke** uniformt på $[0, 1]$, så teknikkerne fra Analyse 2 er utilstrækkelige her !

Størstedelen af landvindingerne i den matematiske analyse og sandsynligheds-regningen i det 20. århundrede har på afgørende måde været baseret på Lebesgues integralbegreb, som I altså nu skal møde.

**Lektionsplan.** Opdateret 3/2.

| Uge | Dato | Seance | Emner |
|---|---|---|---|
| 6 | 4/2 | Selvst. 1 | kapitel 0: Den udvidede reelle akse; summer. |
| | 8/2 | 1 | kapitel 1: Målelige mængder; $\sigma$-algebra. Mål. “Næsten overalt”. |
| 7 | 15/2 | 2 | kapitel 2: Målelige afbildninger. Borel funktioner. |
| 8 | 19/2 | Selvst. 2 | kapitel 1.5: Cantors mængde. Afsnit 6.2.1: Dynkins lemma. |
| | 21/2 | Selvst. 3 | kapitel 2.5: Essentielt begrænsede funktioner, $\mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$. |
| 9 | 1/3 | 3 | kapitel 3: Integral af positive målelige funktioner. |
| 10 | 8/3 | 4 | kapitel 4: Lebesgue integrabilitet. Majorantsætningen. |
| 11 | 15/3 | 5 | kapitel 5: Analysens hovedsætning. Integral med reel parameter. Fouriertransformation. |
| 12 | 19/3 | Selvst. 4 | kapitel 4.4–5: Summer, $\ell(J)$. Afledte målrum. |
| | 22/3 | 6 | kapitel 6: Lebesguemålet. Entydighedssætningen for mål. |
| 13 | 29/3 | 7 | kapitel 7: Variabelskift. Translationsinvarians. Jacobis formel. |
| 14 | 4/4 | 8 | kapitel 8: Produktmål. Tonelli og Fubinis sætninger. |
| 15 | 12/4 | 9 | kapitel 9: Hölder og Minkowskis uligheder. |
| 17 | 26/4 | 10 | kapitel 10: Lebesguerummene $L_p$ og deres fuldstændighed. |
| 18 | 1/5 | Selvst. 5 | kapitel 10.3: Approximation i middel. |
| | 3/5 | 11 | kapitel 11: Foldning af funktioner. |
| 19 | 8/5 | Selvst. 6 | kapitel 12: Schwartzrummet i dimension $d$. |
| | 10/5 | 12 | kapitel 12: Fouriertransformationen på $L_2(\mathbb{R}^d)$. Plancherels sætning. |

(Ændringer kan forekomme)

Som supplerende litteratur kan jeg pege på:

- K. B. Athreya, S. N. Lahiri: *Measure theory and probability theory*. Springer 2006.
- R. Ash: *Probability and measure theory*, Academic Press 2000.
- D. S. Kurtz, C. W. Schwartz: *Theories of integration*, 2nd edition, World Scientific 2012.
- G. S. Nelson:*A user-friendly introduction to Lebesgue measure and integration*. American mathematical society, 2015.

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 2

I kurset har vi 12 forelæsninger med øvelser og 6 selvstudier, svarende til 5 ECTS.

Bemærk at kurset vil **begynde** med et selvstudium. Dette er blot for at I på egen hånd kan læse nogle grundlæggende, men små ting selv, inden vi mødes til den første egentlige kursusgang, som er fredag den 8. februar.

I formodes at have begreber som infimum, supremum og metriske rum presente i arbejdshukommelsen.

**Første selvstudium, skemasat til mandag den 4. februar (ej væsentligt).**

I bedes læse (prologen og) “Chapter 0, Prelimiaries on sums and numbers”. Dog har afsnit 0.3 en *, så det behøver I ikke at læse (men I må gerne hvis I har lyst).

Det meste af 0.1 og 0.2 bør I kunne forholde jer til umiddelbart, eventuelt verificere vha. lidt “pencil pushing”. Men marker de vanskelige passager, så vi kan udrede tingene under øvelserne fredag den 8.

Øvelser til selvstudiet: Regn opgaverne 0.1 og 0.2 samt 0.6 ved at bruge definitionerne. Fortsæt eventuelt med 0.3 osv.

NB. Ved 1. kursusgang regnes øvelserne 0.3–0.5 og 0.7–0.9, blandt andre, så selvstudiet skulle gerne “klæde jer på” til dette.

God arbejdslyst. Vi ses fredag den 8.

**Første gang, fredag den 8. februar.** Vi mødes kl. 8.15 i lok. 5.034, hvor jeg efter en introduktion vil gennemgå noterne kapitel 1 om begrebet $\sigma$-algebra og mål. Desuden vil vi snuse til målelige afbildninger i kapitel 2.

Endelig får I tid til at regne opgaver i emnerne:

**summer:** Regn opgaverne 0.3-0.5. (Vigtige!)

$\sigma$**-algebra:** Prøv at gennemskue opgave 1.1.

**Mål:** Regn opgave 1.9 (nem). Fortsæt med 1.10

**Udvidede reelle tal:** Regn 0.8 og 0.9 for at blive fortrolig med fordelene ved $\bar{\mathbb{R}}$.

NB. Betegnelsen “nem” betyder at opgaven har en kortfattet besvarelse (som dog kunne være svær at finde for den uerfarne. . . ).

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 3**

Idag fik vi gennemgået det vigtigste af kapitel 1 vedr. definitionen af mål og begrebet $\sigma$-algebra.

Vi fik også repeteret duallovene (de Morgans regler):

$$X \setminus (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} X \setminus A_i, \qquad X \setminus (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} X \setminus A_i. \tag{3}$$

Disse er almen mængdealgebra, og nyttige i beviser og opgaver.

I hjemmeforberedelsen bedes I nærstudere Example 1.3.4; udregningen der er baseret på både opgave 0.3 og 0.4 samt 0.5 (overvej hvorfor!).

Afsnit 1.4 om nulmængder og "næsten overalt" bedes I læse på egen hånd (jeg modtager gerne spørgsmål næste gang). Disse begreber indgår dels i selvstudierne i uge 8, dels mange steder i resten af kurset.

**2. gang, fredag den 15. februar, kl. 8.15-12.00.** Vi gennemgår kapitel 2 om målelige funktioner og afbildninger.

Desuden er der opgaver om:

**$\sigma$-algebraer** Først opgave 1.1 fra sidste gang, hvis du ikke nåede den. Fortsæt med 1.6.

Generaliser evt. ved at lave 1.7 (hint nedenfor).

**Frembringersystemer:** Lav ubetinget(!) opgave 1.3.

**Borel mængder:** Regn 1.2 (nem).

Få belyst axiomerne for mål ved at gennemskue opgave 1.18 (nem).

**Almene mål:** Regn 1.11, 1.12 og 1.13. Fortsæt evt. med 1.16 og 1.17.

PS: I opgave 1.7 inducerer $\mathbb{A} = \{A_1, \dots, A_n\}$ en klassedeling $X = \bigcup_i K_i$ (dvs. disjunkt forening) med højst $2^n$ mængder. Dette ses induktivt med $n = 1$ klaret i opgave 1.6; en ny mængde $A_{n+1}$ og dens komplementærmængde $X \setminus A_{n+1}$ giver jo anledning til (højst) dobbelt så mange snitmængder. Herved overføres også egenskaben at for hvert $i$ og $j$ er enten $K_i \subset A_j$ eller $K_i \subset X \setminus A_j$.

Hvis $\mathbb{F}$ betegner samtlige foreningsmængder af de højst $2^n$ mængder i $(K_i)$, så giver simpel kombinatorik at $\mathbb{F}$ højst har $2^{2^n}$ elementer. $\mathbb{F}$ er født stabil under alle foreningsmængder, men er en $\sigma$-algebra fordi $X \setminus \bigcup_{i\in I_0} K_i = \bigcup_{i\notin I_0} K_i \in \mathbb{F}$. Idet $A_j = \bigcup\{K_i \mid A_j \cap K_i \neq \emptyset\} \in \mathbb{F}$ for hvert $j$, så er $\sigma(\mathbb{A}) \subset \mathbb{F}$, hvorfor $\sigma(\mathbb{A})$ højst har $2^{2^n}$ elementer. QED

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 4**

Man kan med fordel repetere Section 1.4 om nulmængder og "næsten overalt".

**2. selvstudium, tirsdag den 19. februar.**

**Cantors mængde** er første emne. Dette eksempel har en `enorm` betydning for vores intuition, som får et ordentligt skud for boven—og derfor har det også stor didaktisk betydning.

Cantors mængde $\mathcal{Z}$ er en Lebesgue nulmængde i enhedsintervallet,

$$\mathcal{Z} \subset [0,1].$$

Første overraskelse er at $\mathcal{Z}$ er *overtællelig*. Dvs. $\mathcal{Z}$ er ækvipotent (jvf. Section 0.3) med $[0,1]$ selv, hvilket virker kontra-intuitivt, da $m(\mathcal{Z}) = 0$ mens $m([0,1]) = 1$.

Næste overraskelse er at $\mathcal{Z}$ er både begrænset og lukket (altså kompakt), så $\mathcal{Z}$ indeholder alle sine grænsepunkter—derfor ligger $\mathcal{Z}$ altså *ikke* tæt i $[0,1]$, på trods af at de er ækvipotente !

Læs nærmere i afsnit 1.5 om konstruktionen af $\mathcal{Z}$ og forklaringen på de understregede egenskaber.

NB. $\mathcal{Z}$ forstås nok nemmest via Cantor–Lebesgues funktion $f\colon [0,1] \to [0,1]$. Denne er konstant på hver bid af $[0,1] \setminus \mathcal{Z}$, så $f' = 0$ gælder n.o.–på trods af at $f$ er voksende med $f(0) = 0$ og $f(1) = 1$ !

Se for uden min Figure 1 på side 16 også gerne de 2 første figurer på

`https://en.wikipedia.org/wiki/Cantor_function`

Der er både en (tilnærmet) graf for $f$, og en animation visende fremgangsmåden.

Som en mere central ting bedes I læse i Section 6.2.1, pt. side 64–65 om begrebet **$\sigma$-klasser**, eller **Dynkin systemer.**

Hovedtemaet er dette: Hvornår er en $\sigma$-klasse $\mathbb{D}$ faktisk en $\sigma$-algebra ? Svaret er at $\mathbb{D}$ skal være fællesmængdestabil (side 64, midten). Overraskende nok er det endda tilstrækkeligt, at $\mathbb{D}$ har et frembringersystem, som er fællesmængdestabilt. Se Dynkins lemma, og studer dets bevis.

Vi får glæde af Dynkins lemma i forelæsningen den 6. gang, hvor vi skal vise "entydighedssætningen for mål", som er et af kursets højdepunkter.

NB. Dynkins lemma er også kendt i litteraturen om stokastiske variable som "Dynkin's $\pi$-$\lambda$-theorem". Dette indgår i ræsonnementer om at to stokastiske variable $X$ og $Y$ er *ens i fordeling* eller om de er *uafhængigt fordelte*.

**3. selvstudium, torsdag den 21. februar.** Her bedes I læse Section 2.5 om essentielt begrænsede funktioner, og om rummet $\mathcal{L}_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$.

Som opgave bedes I kontrollere påstanden om at $\|f\|_\infty$ er en seminorm (begrebet er defineret ved at den sidste del af punkt (i) i (9.1.4) ikke kræves).

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 5**

Sidste gang gennemgik vi kapitel 2 til og med det kommutative diagram (2.4.3). Læs selv hjemme om det tilsvarende kommutative diagram i (2.4.4).

**3. gang, fredag den 1. marts.** Fra kl. 8.15 gennemgås først resten af afsnit 2.4. Siden fortsætter vi med kapitel 3, hvori Lebesgue integralet indføres systematisk.

Opgaverne vedrører mange forskellige emner:

**Næsten overalt:** Regn opgave 1.20 (nem via indikatorfunktioner).

Opgave 1.21: Aksiomerne for mål har "indbygget" den naturlige svækkelse, at mængderne blot behøver at være disjunkte $\mu$-*næsten overalt*. (Nem, se (IV).)

**Indikatorfunktioner:** Lav 2.1 (nem vha. Proposition 2.1.5 !).

**Borel algebraer:** Lav opgave 1.4 ($\mathbb{Q}$ er tællelig).

**Målelighed:** Begynd med at bruge definitionerne til at regne 2.3 (nem).

Afklar hvorvidt polynomier, $\exp$ og $\sin$, der alle ses som afbildninger $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, er *målelige*, dvs. Borel-funktioner.

Er en potensrække $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, betragtet som en kompleks funktion på sin åbne konvergenscirkel, målelig ?

**Den udvidede akse $\overline{\mathbb{R}}$:** Regn opgave 1.8.

*Vink:* Det kan vise sig nyttigt at metrikken $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ giver de samme åbne mængder på $\mathbb{R}$ som den sædvanlige metrik. (For at se dette er det nok at vise de to metrikker har de samme lukkede mængder; men pga. kontinuiteten af $\tan$ og $\arctan$ følger dette af at $x_n \to x$ mht. $d(x, y)$, hvis og kun hvis der er konvergens i vanlig metrik.)

**Faldgrube:** Gennemsku 2.2.

NB ! Opgaverne i de første 3 emner er ret ligetil, så de bør kunne regnes som forberedelse *inden* fredag. Dette anbefales, for at I kan sikre jer fortrolighed med de mange nye begreber.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 6**

Vi fik i fredags gennemgået sidste side i afsnit 2.4 og kapitel 3 om Lebesgue integralet og Udvidelsessætningen, hvori vi fik udledt eksistensen af $\int_X f\,d\mu$ for **enhver** $\mathbb{E}$-$\bar{\mathbb{B}}$-målelig funktion $f\colon X \to [0,\infty]$. Mere præcist nåede vi frem til og med afsnit 3.1.2. Bemærk, at I selv må nærstudere beviset for Proposition 3.1.2.

Før næste forelæsning kan I med fordel repetere egenskab (V) for mål og Example 1.3.3+4 om at konstruere nye mål.

**4. gang, fredag den 8. marts.** Først gennemgås Lebesgue's monotonisætning og resten af kapitel 3. Dernæst fortsætter vi med *integrabilitet* i kapitel 4, og når forhåbentlig til og med afsnit 4.3 om komplekse funktioner. Idet $\mathbb{L}(X,\mathbb{E},\mu)$ betegner mængden af $\mu$-integrable funktioner vil vi med $f \mapsto \int f\,d\mu$ få etableret integralet som en afbildning

$$\mathcal{M}^+(X,\mathbb{E}) \cup \mathbb{L}(X,\mathbb{E},\mu) \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Desuden er der opgaver i:

**Cirklers målelighed:** Forklar hvorfor en cirkelskive $S$ med centrum $(x_0,y_0)$ og radius $r > 0$ har et areal som delmængde af $\mathbb{R}^2$. *Vink:* Vis at $S$ er i $\mathbb{B}_2$ ved at inddrage en kontinuert funktion.

**Dagens integral:** Regn 3.1 vha. monotonisætningen. (*Vink:* Integration af $f$ over $]-n,n]$ skal læses som integration af $f1_{]-n,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

**Mængden $\mathcal{M}^+$:** Gennemsku noternes påstand under formel (3.1.2) om at $cf$ er $\mathbb{E}$-$\bar{\mathbb{B}}$-målelig for alle $f \in \mathcal{M}^+$, $c \in [0,\infty]$.

Fortsæt med at $f = \lim_n f_n$ er i $\mathcal{M}^+$. Og find så heraf et argument for at $f+g$ tilhører $\mathcal{M}^+$. (NB. Her er Proposition 2.3.1 utilstrækkelig!)

Endelig: Eftervis påstanden lige over (3.1.15) om at $f - s \in \mathcal{M}^+$.

**Faldgruber:** Opgave 3.3. *Vink:* Tegn gerne grafer !

**Konvergens i målelige mængder*:** Regn opgave 2.5 — resultatet er vel egentlig overraskende !? (Brug eksempel 2.4.5 og sætning 0.1.2.)

**Frembringersystemer*:** Gennemfør diskussionen i opgave 2.10 om hvorvidt en potensrækkes sumfunktion på konvergenscirklen $B(z_0,\rho)$ er målelig med hensyn til nedarvede Borelalgebra $\mathbb{B}_{B(z_0,\rho)} \subset \mathbb{B}_2$—du vil nok få brug for at regne opgave 2.8 og 2.9 til formålet.

Er sidste del af opgave 1.8 også en konsekvens af opgave 2.8 og 2.9 ?

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 7

I fredags gjorde vi kapitel 3 færdigt og gennemgik afsnit 4.1 om integrabilitet, men nåede ikke Lebesgues majorantsætning. Det blev aftalt at I selv læser afsnit 4.3 om integrabilitet/integral af komplekse funktioner (disse bliver væsentlige i kapitel 5).

**5. gang, fredag den 15. marts.** Her gennemgår vi først og fremmest Lebesgues majorantsætning i afsnit 4.1. Dette er en af kursets mest anvendte sætninger.

Dernæst ser vi i kapitel 5 på nogle anvendelser af den gennemgåede teori; både generelle og konkrete: Analysens hovedsætning, integral som funktion af parameter, den kardinale sinus funktion, Fouriertransformation.

Desuden laver vi opgaver i

**Store og små $\sigma$-algebraer:** Regn opgave 2.4—ideerne her bruges i de formelle definitioner af stokastiske variables *uafhængighed* (punkt(b)) og *betinget* middelværdi.

**Monotonisætningen:** Regn 3.4. (*Vink:* Læs integration af $f$ over $]1,n]$ som integration af $f1_{]1,n]}$ over $\mathbb{R}$.)

Fortsæt med 3.5. Evt. med 3.6*.

**Dagens integral:** Regn 3.9, som vedrører (2) på oversigt nr. 1. Svarene er "3/4" hhv. "nej" (tag sup-normen af et udsnit).

**Ombytning af sum og integral:** Regn opgave 3.10. Evt. også 3.11.

**Modeksempler:** Lav opgave 3.13 (nem!). (*Vink:* Det er væsentligt, at monotonisætningen er formuleret for en *følge* .)

Regn gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 8**

**4. selvstudium, tirsdag den 19. marts.** Her er programmet at I selv studerer afsnit 4.4 om uendelige summer $\sum_{j\in J} a_j$ fra kap. 0, nu fortolket som *integraler* med hensyn til tællemålet på $J$—og udvidet til reelle og komplekse summander $a_j$, hvor summerne *defineres* via integraler.

Bemærk, at mængden af de summerbare familier $(a_j)_{j\in J}$—dvs. de integrable funktioner på $J$—skrives som $\ell(J)$. For $J = \mathbb{N}$ dog blot som $\ell = \ell(\mathbb{N})$.

Desuden kan man få et gensyn med konvergenskriterierne for uendelige rækker, som i mange tilfælde fremstår naturlige ud fra tankesættet I har mødt ifm. Lebesgue integralet og majorantsætningen. I kan regne opgaver i

**Uendelige rækker:** Lav først 4.12 om opdelingskriteriet (majorantsætningen).

Anvend så opdelingskriteriet på det illustrerende eksempel i opgave 4.13. Lav evt. også opgave 4.14.

Jeg besvarer gerne spørgsmål i disse opgaver, f.eks. den 22/3.

Dernæst bedes I nærstudere afsnittene 4.5.1–3 om *afledte* målrum, altså nye målrum ud fra gamle:

- delrum,
- tætheder,
- billedmål. (Bemærk Ex. 4.5.7 om *fordelingen* af en stokastisk variabel.)

[Desuden kunne listen over afledte målrum have rummet produkter af givne målrum, men disse er emnet i kapitel 6.]

Prøv i hvert delafsnit at besvare spørgsmål som

- Hvad er emnet ?
- Hvilke resultater præsenteres ?
- Hvordan er argumenterne bygget op ?

Vi kommer til at møde begreberne senere i både teori og opgaver.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 9**

I dag fik vi gennemgået Lebesgues majorantsætning med bevis og afsnit 5.1.

I opgave 3.9 fra dagens øvelser finder man, idet monotonisætningens korollar tillader ombytning af sum og integral, og ved brug af en teleskoperende sum, at

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2}(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{N+1}-\frac{1}{N+2}) = \frac{3}{4}.$$

På den ene side kunne man forestille sig at rækken konvergerer uniformt (hvad der ville tillade ombytningen), og at det måske ville være nok med uniform konvergens for $x \in ]0,1[$, idet f.eks. $\{1\}$ er en Lebesgue nulmængde.

På den anden side er kriteriet herfor, at der til hvert $\varepsilon > 0$ findes $N$ så

$$\forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N}\colon \; \sup_{0<x<1} \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{x^{k+1}}{k} < \varepsilon. \tag{4}$$

Men den endelige sum er kontinuert på $[0,1]$, så $\sup_{0<x<1}$ kan erstattes af $\sup_{0\leq x\leq 1}$. Sidstnævnte er et maksimum som antages i $x = 1$, idet $x^{k+1}$ er voksende, så (4) er ensbetydende med $\forall n \geq N \forall p\colon \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} < \varepsilon$ —som er *forkert* for ethvert $N$.

Rækken i (4) konvergerer altså *ikke* uniformt—så analyse 2 rækker ikke !

**6. gang, fredag den 22. marts.** Vi gennemgår 5.2 om integral som funktion af parameter og Fouriertransformationen i afsnit 5.3—navnlig majorantsætningen vil være et vigtigt hjælpemiddel.

Dernæst fortsætter vi med Lebesguemålet og entydighedssætningen for mål i afsnit 6.1 og 6.2. NB: Repeter $\sigma$-klasser og Dynkins lemma fra selvstudium nr. 2.

**Integration af positive funktioner:** Regn opgave 3.11. Evt. 3.10, hvis den ikke blev regnet sidste gang.

**Integrabilitet:** Regn 4.1 (nem!) — og brug den i 4.2. Snup så 4.6 (nyttig!).

**Majorantsætningen:** Brug majorantsætningen til at vise at for $n \to \infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1/n)+1+x^2}\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \pi.$$

Dernæst opgave 4.3.

Prøv så 4.4 (som illustrerer forudsætningerne) og fortsæt med 4.7.

**Dagens integral:** Vis jvf. noternes formel (5.0.1) at

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx = 0.$$

(*Vink:* Inddrag og udnyt analysens hovedsætning.)

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 10

Efter selvstudiet den 19. marts skulle I nu gerne være fortrolige med

- mål på og integration over delmængde,
- mål med tæthed,
- billedmål,
- summer som integral mht. tællemålet, $\ell(J)$.

Bemærk at en *stokastisk variabel* er en funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, som studeres i tilknytning til et målrum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, hvorved $P$ er et sandsynlighedsmål ($P(\Omega) = 1$) defineret på $\sigma$-algebraen $\mathcal{F}$ i $\Omega$ (tilstandsrummet).

Helt generelt er *fordelingen* af $f$ defineret til at være det sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, som er givet ved billedmålet $\mu = f(P)$. F.eks. er

$$\mu([a, b]) = P(f^{-1}([a, b])).$$

Her er $\mu$ så i bedste fald defineret på den *stærkeste* (=største) $\sigma$-algebra i $\mathbb{R}$, som gør $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ Borel målelig (jvf. den stillede opgave 2.4(a)).

I en række hovedtilfælde har $\mu = f(P)$ endda *tæthed* mht. Lebesguemålet på $\mathbb{R}$, hvis $f$ er normal- eller eksponentialfordelt; jvf. eksempel 4.5.4.

Som konsekvens af sætning 4.5.4 om billedmål har man, når $f$ har middelværdi, altså når $f \in \mathcal{L}(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, at der gælder den velkendte formel (hvor $\mathrm{id}(x) = x$)

$$\mathbb{E}(f) = \int_\Omega f\,dP = \int_\Omega \mathrm{id} \circ f\,dP = \int_\mathbb{R} x\,df(P). \tag{5}$$

Mere præcist er den stokastiske variable $f$ integrabel mht. $P$ hvis og kun hvis $x$ er integrabel på $\mathbb{R}$ mht. billedmålet (=fordelingen) $f(P)$. Sidstnævnte egenskab omtales som at fordelingen $f(P)$ har *første moment*, hvor kriteriet er at $\int_\mathbb{R} |x|\,df(P) < \infty$, og dette er altså ækvivalent med at $f$ selv har middelværdi.

Højresiden af (5) kan gøres mere konkret når $f(P)$ er f.eks. eksponentialeller normalfordelingen som i eksempel 4.5.4, eller i andre tilfælde hvor $f(P)$ har tæthed mht. Lebesguemålet $dx$ på $\mathbb{R}$.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 11**

Vi fik i dag gennemgået resten af kapitel 5 (idet Lemma 5.3.4 blev overladt til jer selv at læse). Desuden nåede vi det lille afsnit 6.1.

**7. gang, fredag den 29. marts.** Vi fortsætter her med 6.2 om entydighedssætningen for mål (I bedes have Dynkins lemma present). Denne udnyttes strak til en gennemgang af kapitel 6 om variabelskifter (I bedes have billedmål present).

For at øve tingene regnes opgaver i

**Integration over delmængder:** Regn 4.16 og 4.17. (Hensigten er at bestemme et velkendt udtryk for $F(t)$ ved at gå gennem skridtene.)

**Lokalt integrable funktioner:** Lav 5.1 og 5.2 om *integrabilitet i endepunkterne* (begge bruges ofte).

**Dagens integraler:** Regn de velkendte eksempler i opgave 5.3 (jvf. opgave 5.1+5.2).

Udvid dit univers vha. opgave 5.4: For hvilke $a > 0$ er funktionen

$$\frac{1}{x(\log x)^a} \qquad \text{(for } x > 2\text{)}$$

integrabel i $\infty$ ?

*Vink:* En stamfunktion kan opskrives ! (NB. $a = 1$ er et særtilfælde.)

Gamle opgaver, hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 12

I fredags nåede vi det vigtigste af kapitel 7 inkl. Theorem 7.2.2 om at defomationsfaktoren for en inverterbar matrix $G$ er den gruppehomomorfi $\mathrm{GL}_d \to \mathbb{R}_+$, der er givet ved $\Delta(G) = |\det G|$.

Jacobis transformationssætning må I selv orientere jer om i afsnit 7.3, som jeg siden har opdateret. Desuden har jeg tilføjet Corollary 7.2.4, om at kongruente mængder har samme Lebesgue mål—det kan I læse for jeres egen skyld. Det vil nok også motivere Theorem 7.2.2 bedre.

Corollary 7.2.4 er baseret på velkendte ting om *isometrier* i euklidiske rum. For en fuldstændigheds skyld opsummeres disse her:

> *Enhver* isometri $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er *affin*, endda på formen
> $$T(x) = Ox + a$$
> for en vektor $a \in \mathbb{R}^n$ og en *ortogonal* matrix $O$ (dvs. $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$):

*Bevis:* Pér definition opfylder en isometri $T$ at

$$\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\| \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Man kan gerne antage $T(0) = 0$, da $T - T(0)$ også er en isometri; så rækker det at vise den har formen $Ox$. For $y = 0$ ses så at $T$ er normbevarende, $\|T(x)\| = \|x\|$. Fordi normen udspringer af det indre produkt, dvs. $\|x\|^2 = (\, x \,|\, x \,)$, ses at

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(\, x \,|\, y \,) \tag{7}$$

og da man i alle normerne kan erstatte $x$ med $T(x)$ og $y$ med $T(y)$, uden at ændre værdierne, sluttes heraf at $T$ er skalarproduktbevarende:

$$(\, T(x) \,|\, T(y) \,) = (\, x \,|\, y \,) \quad \text{for alle} \quad x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

For den naturlige basis $(e_1, \dots, e_n)$ fås så $(\, T(e_j) \,|\, T(e_k) \,) = \delta_{jk}$, hvorfor $\mathbb{R}^n$ også har $(T(e_1), \dots, T(e_n))$ som ortonormal basis.

Så er $T(x) = \sum \lambda_j(x) T(e_j)$ for visse tal $\lambda_j(x)$, som via det indre produkt med $T(e_k)$ ses at være $\lambda_k(x) = (\, T(x) \,|\, T(e_k) \,)$. Ved indsættelse heraf ses det at

$$T(x) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, T(x) \,|\, T(e_j) \,) T(e_j) = \sum_{j=1,\dots,n} (\, x \,|\, e_j \,) T(e_j). \tag{9}$$

Sidste udtryk afhænger lineært af $x$, hvoraf $T(x) = Ox$ for en vis $n \times n$-matrix $O$. Nu medfører (8) at $O^{\mathrm{t}} O x = x$, hvoraf $O^{\mathrm{t}} = O^{-1}$ følger som ønsket.

Det er klassisk sprogbrug, at $A, B \subset \mathbb{R}^n$ kaldes *kongruente* dersom $B = T(A)$ for en passende isometri $T$. Idet $Tx = Ox + a$ som vist ovenfor, så noteres det at $a$ bidrager med en flytning, mens multiplikationen med $O$ både kan give en rotation (for $\det O = 1$) eller en spejling i origo ($O = -I$) eller i en linie derigennem (for $\det O = -1$)—eller i højere dimensioner en blanding af rotation og spejling.

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 13

**8. gang, fredag den 5. april.**

Vi gennemgår kapitel 8 om eksistensen af *produktmål* til og med bevis for Tonellis sætning om ombytning af integrationsordenen for funktioner der tilhører $\mathcal{M}^+(X \times Y, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$—evt. når vi lidt af Fubinis sætning om $\mathcal{L}(X \times Y, \mu \otimes \nu)$.

NB! Dette er en stor mundfuld, så I opfordres til at orientere jer i kapitel 6 inden forelæsningen !

Blandt opgaverne ser vi på:

**Dagens integral:** Regn 5.7 om $\mathrm{sinc}$. Snup også 5.8 ved samme lejlighed.

**Fourier transformering:** Lav 5.15 og fortsæt med 5.16.

**Invarians:** Gennemsku 7.3 !

**Integral med parameter:** Regn opgave 5.14.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 14**

I fredags nåede vi afsnit 8.1 om produktmålet $\mu \otimes \nu$ i alle detaljer: Vi viste at klassen af $\sigma$-endelige målrum er *stabil* under dannelse af produktrum. I må selv læse det meget væsentlige resultat i Sætning 8.1.8 om Lebesgue målet, at

$$m_p \otimes m_q = m_{p+q}.$$

Deusden nåede vi i 8.2 Tonellis sætning om ombytning af integrationsordenen, eller rettere, om gentagen integration af en funktion på et produktrum.

Der er mange nye betragtninger, og nye begreber, for tiden. Det kunne måske være en god ide at regne opgave 8.3, 8.4 og 8.5 som element i hjemmeforberedelsen.

**9. gang, fredag den 12. april.** Vi må først gøre kapitel 8 færdigt med gennemgang af Fubinis sætning samt et par eksempler.

Dernæst går videre med klassiske uligheder og funktionsrum i kapitel 9. (Afsnit med * er som sædvanligt ikke pensum, men kan læses af de interesserede.)

Desuden er der opgaver i:

$\sigma$**-klasser:** Regn 6.1 og 6.2. Fortsæt evt. med 6.3.

**Dagens integral:** Lav 7.6 ved hjælp af en passende substitution.

**Deformationsfaktorer:** Regn 7.4.

**Tonelli:** Verificer detaljerne i Example 8.2.1.

**Produkt algebra:** Regn 8.6 og 8.7.

**Jacobis transformationsregel:** Lav 7.5 om sfæriske koordinater.

Med venlig hilsen
Jon

## Oversigt nr. 15

Idag færdiggjorde vi Fubinis sætning med bevis og et par eksempler. Desuden nåede vi at bevise Minkowskis ulighed, hvorved vi færdiggjorde kapitel 9 i noterne (pånær sætning 9.1.6).

**10. gang, fredag den 26. april.** Her gennemgår vi først kapitel 10.1–10.2 i mit notesæt, med hovedvægt på Fischers fuldstændighedssætning. (Afsnit 10.3 bliver emnet for næste selvstudium.)

Dernæst begynder vi på kapitel 9 om såkaldt *foldning* af funktioner. Vi når antageligt afsnit 11.1.

**Tonelli/Fubini:** Lav 8.16 (nem: brug et eksempel i noterne) og 8.15.

Fortsæt med 8.22.

**Dagens integral*:** Forsøg dig med at udregne

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\, dx\, dy.$$

*Vink:* Se forslag i opgave 8.23.

**Summer:** Lav 8.17+18+19 i denne rækkefølge.

**Nødvendighed af $\sigma$-endelighed:** Regn 8.20 og overvej hvad man kan konkludere.

**Produktmål:** Regn 8.14 (brug $\pi_1, \pi_2$). Bemærk, at vi derved som specialtilfælde får ført Theorem 8.1.8 over til *delmængder* af $\mathbb{R}^d$.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 16**

**5. selvstudium, onsdag den 1. maj.** Ved dagens selvstudium er programmet afsnit 10.3 i mine egne noter. Her beskrives det hvordan enhver funktion i Lebesgue rummet $L_p$ med $1 \leq p < \infty$ kan tilnærmes vilkårligt godt med både simple funktioner og med kontinuerte funktioner havende kompakt støtte.

Konkret vil jeg foreslå følgende:

- Læs nærmere nedenfor på denne oversigt om begrebet tæthed. Dette er til uddybning af den øverste del af noternes tekst oven for Definition 10.3.1.
- Studer afsnit 10.3 frem til Lemma 10.3.2 om tæthed af simple $L_p$-funktioner (beviset er ret ligetil).
- Vis at $\{ 1_E \mid E \in \mathbb{E} \}$ er total i $L_\infty(X, \mathbb{E}, \mu)$ for et vilkårligt målrum. (*Vink:* Hvad nu hvis $f \in \mathbb{L}_\infty(\mu)$ har værdimængde $f(X) = [0, \|f\|_\infty]$ ?)
- Studer Proposition 10.3.3 om trinfunktioner.
- Læs resten af 10.3 om rummet $C_0^\infty$ af glatte funktioner med kompakt støtte—bemærk at man faktisk kan angive sådanne funktioner eksplicit, jævnfør formlen (10.3.14).

  Nærstuder så indholdet af Theorem 10.3.5. Prøv at skrive indholdet op på en formellinie med eksistens- og alkvantorer !

**Repetition af begrebet *tæthed* i et metrisk rum.** En delmængde $A$ af et metrisk rum $(M, d)$ siges at være (overalt) tæt i $M$, eller at ligge tæt i $M$, hvis enhver omegn af et vilkårligt punkt $x \in M$ indholder elementer fra $A$, dvs.

$$\forall r > 0 \colon A \bigcap B(x, r) \neq \emptyset. \tag{10}$$

Løseligt betyder dette, at ethvert element kan approximeres vilkårligt godt med elementer fra $A$.

Mere generelt siges $A$ at være overalt tæt i en delmængde $B \subset M$, hvis enhver omegn af et vilkårligt punkt $y \in B$ skærer $A$, dvs. at $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ gælder for ethvert $r > 0$. Men derved er $y$ pr. definition et kontaktpunkt for $A$, så med andre ord er $A$ tæt i delmængden $B$ dersom $B \subset \overline{A}$.

Af definitionen for tæthed af en delmængde i en anden ses det, at mængden af rationale tal $\mathbb{Q}$ ikke bare er tæt i $\mathbb{R}$, men at $\mathbb{Q}$ også ligger tæt i delmængden $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ af irrationale tal ! (Sprogbrugen er lidt bizar eftersom $\mathbb{Q}$ og $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ er disjunkte.) Omvendt ligger $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ også tæt i $\mathbb{Q}$, selvom det er sværere at vise formelt.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 17**

**Pensum og eksamen.**

Pensum er kapitel 0–12 i det benyttede notesæt “Notes on integration theory”, som jeg har udleveret løbende på kursets moodle-side i semestrets løb. Dog er afsnittene mærket med * ikke pensum. (Pt. mangler Chapter 12 at blive skrevet færdigt; hvis dette ikke nås (pga. sygdom eller andet) inden kursets afslutning, så læses efter kapitel 8.2, 8.4 fra “Mål- og integralteori” af C. Berg og T. Gutmann Madsen (KU) i stedet for.)

Til den mundtlige eksamen den 4. juni kan man trække et af følgende spørgsmål:

(1) Monotonisætningen.

(2) Lebesgueintegral og integrabilitet.

(3) Majorantsætningen.

(4) Entydighedssætningen for mål.

(5) Variabelskifte. Deformationsfaktorer.

(6) Produktmål.

(7) Tonellis og Fubinis sætninger.

(8) Hölders og Minkowskis uligheder.

(9) Lebesguerummene $L_p$ og deres fuldstændighed.

(10) Fouriertransformationen på $\mathbb{R}^d$.

(11) Foldning på $\mathbb{R}^d$.

(12) Parsevals ligning.

Man forventes selv at tale ca. 12–15 minutter om det trukne emne. Der er 20 minutters forberedelsestid til hver eksaminand.

Naturligvis kan der også forekomme supplerende spørgsmål i kursets øvrige emner.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 18**

Sidste gang nåede vi til og med afsnit 10.2 i noterne, inklusive de 3 korollarer, hvor beviserne er ret direkte konsekvenser af de foregående argumenter.

Afsnit 10.3 skal I læse som selvstudium på onsdag (jvf. oversigt nr. 16). Disse resultater bliver udnyttet kraftigt i kursets sidste forelæsninger.

**11. gang, fredag den 3. maj.** Vi begynder med afsnit 11.1–11.2 om foldning af funktioner, og 10.3 om stærk konvergens af translation.

Dernæst tager vi hul på de elementære ting om Fourier transformationen i afsnit 12.1–2. Vi skulle ideelt set nå sætningen om Fouriers inversionsformel.

Inversionsformlen kræver at vi stifter bekendtskab med Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, der er beskrevet i afsnit 12.2; vi fokuserer på $d = 1$ for simpelhedens skyld. Et dybere kendskab til dette for alle $d \geq 1$ får I ved hjælp af multiindekser i det sidste selvstudium onsdag den 8. maj.

**Lebesgue rum:** Gennemsku 9.1–4.

$L_\infty$**:** Regn 9.5–6 og 10.1.

**Konvergens i** $p$**-middel:** Lav først 10.3.

**Partiel integration:** Eftervis følgende generelle udgave af formlen for partiel integration, hvor funktionerne altså *ikke* antages at være $C^1$:

Hvis $f, g \in \mathcal{L}([a, b])$, så gælder om vilkårlige stamfunktioner $F$ og $G$ at

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [F(x)G(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b F(x)g(x)\,dx \qquad (11)$$

*Vink:* Brug Fubinis sætning til at integrere $f(x)g(y)$ over trekanten af de $(x, y)$ hvor $a \leq x \leq b$ og $a \leq y \leq x$. (**Tegn trekanten !** og brug indikatorfunktionen for denne.)

**Fouriertransformationen på** $L_1$**:** Regn 5.17.

Gamle opgaver hvis der er tid til overs.

Med venlig hilsen
Jon

**Oversigt nr. 19**

Som opfølgning på opgaverne repeteres de klassiske fakta at, for $a, b > 0$,

$$\frac{x^a}{e^{bx}} \to 0 \quad \text{for } x \to \infty; \qquad \frac{(\log y)^a}{y^b} \to 0 \quad \text{for } y \to \infty. \tag{12}$$

Da $(\cdot)^a$ er voksende er det nok at vise at $\frac{x}{e^{xb/a}} \to 0$ for $x \to \infty$, og dette fås fra l'Hôpitals regel fordi $1 \cdot e^{-xb/a} \to 0$ for $x \to \infty$. Substitueres med $x = \log y$ opnås den anden grænseværdi, thi vi har $y \to \infty$ hvis og kun hvis $x \to \infty$.

F.eks. kan man i opgave 9.4 om $f(x) = (\sqrt{x}(1 + |\log x|)^{-1}$ se at $f \notin \mathcal{L}_p$ for $p < 2$, fordi formlen ovenfor giver at $(\log x)^p \le cx^b$, hvoraf

$$\int |f|^p \, dx \ge \int_e^\infty (\sqrt{x}(2\log x)^{-p} \, dx \ge C \int_e^\infty x^{-(b+p/2)} \, dx = \infty$$

når $b > 0$ er valgt så lille at $b + p/2 < 1$.

**6. selvstudium, onsdag den 8. maj: Schwartzrummet i dimension $d \ge 1$.**

Her er programmet, at I nærstuderer afsnit 12.2 til midt på side 122 for at lære Schwartzrummet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ at kende, når funktionerne afhænger af $x = (x_1, \dots, x_d)$:

**Multi-indices:** Find et multiindex $\alpha$ sådan at $\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2 \partial x_3 \partial x_4^3}$ kan skrives helt enkelt som $\partial^\alpha f(x)$. Hvad er længden $|\alpha|$ ?

Studer notationen omkring multiindekser. Og giv et kort kombinatorisk argument for at $C_{N,\alpha} = \frac{N!}{\alpha!(N-|\alpha|)!}$ i multinomialformlen (12.2.4).

**Schwartzrummet:** Gennemfør beviset side 120 over midten for at indse at definitionen er ækvivalent med ulighederne i (12.2.9).

**Hurtigt aftagende funktioner:** Efterprøv påstanden i (12.2.11) og overvej betydningen af formlen.

Kontroller derefter Example 12.2.2—brug første del af (12) ovenfor.

Endelig: Studer beviset for Riemann–Lebesgues lemma (side 122) med "hurtigt aftagende" i baghovedet.

**Inklusionen $\mathcal{S} \subset L_p$:** Overbevis dig selv om at $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k) \subset L_1(\mathbb{R}^k)$ ved først at gennemgå beviset for Lemma 12.2.4 for $p = 1$.

Hvor stor skal man vælge $m$ i (5) for at opnå, at $\mathcal{S} \subset L_p$ for et givet $p > 0$ ?

**Invarians under differentiation og multiplikation:** Gennemfør beviset for Theorem 12.2.5, som fortæller dels hvorledes $\mathcal{F}$ "ombytter" differentiation og multiplikation på $\mathcal{S}$, dels sikrer at $\mathcal{F}$ afbilder $\mathcal{S}$ ind i $\mathcal{S}$ selv.

Udled ifm. beviset, at multiplikation med $x^\alpha$ og anvendelse af $\partial^\beta$ lader $\mathcal{S}$ være invariant, dvs. de sender begge enhver funktion $f \in \mathcal{S}$ over i nye funktioner $x^\alpha f(x)$ og $\partial^\beta f(x)$ tilhørende $\mathcal{S}$.

**Gauss-klokken:** Nærstuder Example 12.2.3.

Vi vil i få brug for disse egenskaber ved $\mathcal{S}(\mathbb{R}^k)$ i den resterende del af kurset.

Med venlig hilsen
Jon