Oversigt nr. 1

I kurset "Samhørende og partielle differentialligninger" vil vi i foråret 2006 benytte bogen

[EP] *Elementary differential equations with boundary value problems* af C. H. Edwards og D. E. Penney, 5. udgave; Prentice Hall, 2003.

Planen er at gennemgå afsnittene 5.6–5.8 (om samhørende differentialligninger) og 8.5–8.7 (om hovedtyper af partielle differentialligninger). Siden kommer der en skriftlig eksamen; mere derom senere.

Jeg vil forsøge at kæde stoffet sammen med det I har haft på tidligere kurser om differentialligninger. Derfor kan jeg anbefale, at I repeterer afsnittene 5.4–5.5, som tidligere har været gennemgået på 3. semester.

Måske endnu bedre ville det være at læse afsnit 5.1–5.5 i [EP] som optakt.

1. gang, mandag den 6. februar 2006, kl. 12.30–16.15. Vi begynder her med forelæsning i Fib. 16/1.101. Sigtet er at gennemgå afsnit 5.6 i [EP].

Nogle stikord: *Fuldstændig egenværdi, defekt egenværdi; generaliseret egenvektor; kæde af længde k.*

Det er hensigten at I skal kunne forstå følgende hovedresultat:

Sætning. *Enhver $n \times n$ matrix A har n lineært uafhængige* **generaliserede** *egenvektorer.*

NB ! Som vi skal se, er dette nyttigt fordi et differentialligningssystem af formen $x'(t) = Ax(t)$ altid kan løses — uanset hvad A er.

Fra kl. 14.15 er der opgaveregning. Vi ser på opgaver

i multiple egenværdier: 5.6.1+2+7;

i defekte egenværdier: 5.6.12+13+18;

kæder: 5.6.19+26;

anvendelse: 5.6.35 (eksempel 5.6.6 med andre tal)

Man kan også se på 5.6.33 for at se på hvad komplekse rødder giver af løsninger.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 2

Vi fik sidste gang gennemgået kapitel 5.6 i [EP]. Programmet for næste gang er afsnit 5.7–5.8. Som noget helt nyt (for de fleste af jer, antager jeg) skal vi her møde ekponentialfunktionen af en *matrix !*

Det vil sige, at for en $n \times n$-matrix A skal vi indføre e^A. Tidligere har I mødt e^t for reelt tal $t \in \mathbb{R}$ og e^z for komplekse tal $z \in \mathbb{C}$ (jvf. mat1a på basis).

Man kan vise at $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$ for alle $t \in \mathbb{R}$. Dette kan vi så bruge til at *definere* eksponentialmatricen

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!} A^k. \tag{1}$$

Tilsvarende fås e^{tA} ved at erstatte A ovenfor med tA, hvor $t \in \mathbb{R}$.

Fordelen ved matricen e^{tA} er helt konkret at begyndelsesværdiproblemet for n samhørende differentialligninger

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{2}$$

faktisk løses af $\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x}_0$. Dette minder jo nydeligt om situationen for $n = 1$ (hvori A jo blot er et tal) og er nyttigt i mange sammenhænge.

2. gang, mandag den 13. februar 2006.

Vi begynder kl. 12.30 med forelæsning over afsnit 5.7. Desuden skulle vi gerne nå 5.8, som dog kun gennemgås fra side 414.

Fra kl. 14.15 ser vi på opgaver i

kæder: 5.6.22;

fundamentalmatricer: 5.7.2+3+4;

nilpotente matricer: 5.7.21+23;

eksponentialmatricer: 5.7.26+27, og til den almene metode: 5.7.35+37.

løsningsformlen: 5.8.30+31+34.

NB ! Sørg for at regne mindst en opgave fra hvert emne, mens Rasmus eller jeg kan hjælpe jer. Siden bør I naturligvis løse resten af opgaverne hjemme for at sikre jer I har forstået sagerne.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 3

Sidste gang gennemgik vi kapitel 5.7 af [EP], og ganske lidt fra kapitel 5.8 om de inhomogene førsteordens systemer:

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{f}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x_0}. \tag{3}$$

Vi viste at når koefficientmatricen A er konstant, så er løsningen givet ved formlen

$$\mathbf{x}(t) = e^{tA}\mathbf{x_0} + e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{4}$$

Bemærk at dette *korrigerer* formel (28) side 417 i [EP], hvor integrationsvariablen ikke burde hedde t.

3. gang, mandag den 27. februar.

I tiden 12.30–14.15 vil vi her runde kapitel 5 af ganske kort. Dernæst vil vi tage hul på emnet *partielle* diffenrentialligninger.

Konkret vil vi gennemgå afsnit 8.5 i [EP] om varmeledningsligningen. Den er et eksempel på en såkaldt *parabolsk* differentialligning.

I løsningen af denne ligning vil vi udnytte *Fourierrækker*, som blev gennemgået via bogens kapitel 8.1–8.3 på 3. semester. **Repeter dette !**

Som vi skal se, vil det for varmeledning i en stang af længde L være relevant at løse varmeledningsligningen (med $u(x,t)$ = den ubekendte temperatur i x til tiden t)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5}$$

under passende *bibetingelser*. Disse vil dels være begyndelsesbetingelser af formen

$$u(x,0) = f(x), \tag{6}$$

hvorved $f(x)$ er en given funktion (der repræsenterer temperaturfordelingen til tiden $t = 0$). Dels er der flere typer af *randbetingelser*, som f.eks. den såkaldte Dirichlét-betingelse

$$u(0,t) = 0 = u(L,t). \tag{7}$$

Tilsammenligning er Neumann-betingelsen den, hvor det kræves at

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t). \tag{8}$$

Fra kl. 14.15 ser vi på opgaver i

løsningsformlen: 5.8.33 (NB ! A er nilpotent);

Dirichlétbetingelsen: 8.5.1+3;

Neumannbetingelsen: 8.5.2+7;

Randbetingelsens effekt: Regn både 8.5.10 og 8.5.11;

Anvendelse: Regn først 8.5.15, dernæst 8.5.16;

Mere realistisk randbet.: 8.5.23.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 4

Besvarelser af udvalgte opgaver fra sidste gang er nu tilgængelige fra

`http://www.math.aau.dk/~jjohnsen/Teaching/index.html`

Sidste gang fik vi gennemgået afsnit 8.5 om varmeledningsligningen (dog blev denne kun studeret, ej udledt). Vi så på den 1-dimensionale situation (som flere af jer bemærkede er lettere urealistisk). Hvis man regner temperaturen som en funktion $u(x, y, z, t)$, som afhænger af de retvinklede koordinater x, y, z, så kan det vises at den relevante ligning bliver

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}). \tag{9}$$

De ekstra led komplicerer naturligvis sagerne, navnlig i notationen; grundtrækkene i behandlingen ligner det vi har set for den 1-dimensionale ligning.

4. gang, mandag den 6. marts. Vi gennemgår først den 1-dimensionale *bølgeligning*, som f.eks. beskriver en svingende guitarstreng (eller en hængebro. . . ?),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{10}$$

Her står a for *bølgehastigheden*. I tre dimensioner har man også her en mere generel ligning for den ubekendte $u = u(x, y, z, t)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}). \tag{11}$$

Desuden hører der randbetingelser til for at fastlægge løsningen. Og som noget anderledes skal der nu *to* begyndelsesbetingelser til,

$$u(x, 0) = f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x). \tag{12}$$

Dette er dog naturligt fordi vi har en tidsafledt af *anden* orden i ligningen. (Denne begyndelsesbetingelse, hvori antallet af betingelser er lig antallet af tidsafledte i ligningen, er kendt som Cauchys betingelse.)

Fra 14.15 ser vi på opgaver.

grundfrekvens: 8.6.11 (jvf. formlerne (2) og (25)).

anvendelse: Regn (8.6.19 og) 8.6.20. Bemærk at opgaven kan illustrere, hvad der sker når en understøttelse pludselig forsvinder. (Man kan måske tænke på et stillads med tre standere, hvoraf den miderste pludselig knækker.)

At den maksimale nedbøjning bliver $y(x) = 2\varphi(x)$, hvor $\varphi(x)$ angiver den (negative) ligevægtsstilling, er vel egentlig både simpelt og overraskende. (Hvordan skulle man opnå det resultat uden løsning af en partiel differentialligning?)

d'Alemberts løsning: Regn 8.6.13. Lav også 8.6.14, som viser at begyndelses- og randbetingelserne vil være opfyldt, hvis F er 'pæn' nok.

fart- eller steddata nul: 8.6.1 hhv. 8.6.7.

ingen nuldata: 8.6.5.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 5

5. gang, fredag den 10. marts. Vi mødes kl. 12.30 til gennemgang af kapitel 8.7. Her skal vi møde *Laplaceligningen*, som er hovedeksemplet på partielle differentialligninger af den elliptiske type. For jeres formål vil det oftest betyde at tiden ikke indgår i ligningen — så det er typisk stationære fænomener der beskrives af den slags ligninger (spændinger i et deformeret materiale, f.eks.).

Som opgaver ser vi på

Dirichlet-problemet for et rektangel: 8.7.1+2+3. Bemærk at de sammmen med Eksempel 8.7.1 giver hele løsningen for et rektangel.

Områder med rotationssymmetri: Regn 8.7.13+14. Bemærk udtrykket i formel (22) for Laplaceoperatoren i polære koordinater.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen

Oversigt nr. 6

Vi fik den sidste gang gennemgået afsnit 8.7 om Laplaces ligning og Dirichléts randværdiproblem for den. Hovedeksemplet var stationær temperaturfordeling. Vi nåede til og med løsningsformlen for et cirkulært område, behandlet i polære koordinater (til side 608).

For en fuldstændigheds skyld nævnes, at funktionerne $\cosh x$ og $\sinh x$ (hyperbolsk cosinus og sinus) er defineret ved

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \qquad \sinh x = \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}). \tag{13}$$

Disse optræder i bogens udregninger, men man kan altså også benytte eksponentialfunktioner som gjort ved forelæsningen. (Løsningsformlerne er dog nok mest klare når man bruger $\cosh$ og $\sinh$.)

Pensum. Kursets pensum er de læste afsnit af Edwards og Penneys bog. Mere præcist er dette afsnit 5.6, 5.7 og 5.8 (dog er side 412 til midten af 414 kursorisk); og 8.5, 8.6 og 8.7.

Opgaver der er indikative for den kommende skriftlige eksamen kommer senere, sidst i maj.

Med venlig hilsen
Jon Johnsen