Miniprojekt: Lineær algebra på polynomier

Grupperne forventes at regne en mængde af opgaver, som tilsammen dækker 100 point. De 'små' opgaver giver hver 5 point, mens temaopgaverne giver 25 point. Der er det krav, at alle skal regne

- mindst en opgave (à 5 point) fra hvert af afsnittene 1–5, og
- mindst 1 temaopgave (à 25 point).

Hver gruppe udarbejder i ugens løb en besvarelse dækkende 100 point. Besvarelsen sendes i en PDF-fil til vores hjælpelærer Hans på `hanskk@math.aau.dk` fredag den 14. oktober. Senere får alle gruppemedlemmer en kopi af besvarelsen med rettelser.

1 Vektorrum

(1) Giv et argument for at $\mathbb{C}[z]$ er (organiseret som) et vektorrum over $\mathbb{C}$, idet $z \in \mathbb{C}$ betegner en komplex variabel. Gælder det samme om $\mathbb{R}[z]$? Hvad så med $\mathbb{R}[x]$, hvor x betegner en reel variabel ?

(2) Godtgør at $\mathbb{F}_m[z]$ er et underrum af $\mathbb{F}[z]$. (I det følgende underforstås, at variablen $z \in \mathbb{F}$.) Angiv nulvektoren præcist (tænk på at det er en funktion).

(3) Angiv $\mathbb{F}_0[z]$, $\mathbb{F}_1[z]$ og $\mathbb{F}_2[z]$ med mængdesymboler, og bestem et frembringersæt for $\mathbb{F}_m[z]$. Begrund at $\mathbb{F}_m[z]$ har endelig dimension.

(4) *Entydighedssætningen for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathbb{F}[z]$ er ens som funktioner $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$, så har p, q de samme koefficienter. Bevis denne !
(*Vink:* Brug et passende valgt entydighedsresultat fra lineær algebra.)

(5) *Den stærke Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathbb{F}[z]$ stemmer overens i en omegn af 0 i $\mathbb{F}$, så har p, q de samme koefficienter.
(*Vink:* Hvis du indsætter $x = 0$, så får du brug for et kontinuitetsargument! Det er nemmere at se på $F(M, \mathbb{F})$ for en passende mængde M.)

(6) *Den 'hyperstærke' Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathbb{R}_m[x]$ opfylder $p(0) = q(0)$ og $p^{(k)}(0) = q^{(k)}(0)$ for $k \in \{1, \dots, m\}$, så har p, q de samme koefficienter.

(7) ****Den 'ultrastærke' Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathbb{F}[z]$ stemmer overens i $m + 1$ forskellige punkter $z_0, z_1, \dots, z_m$ i $\mathbb{F}$, hvor $m = \max(\deg p, \deg q)$, så har $p = q$ de samme koefficienter (og er derfor ens som funktioner $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$).

I beviset får man nok brug for at vise at Vandermonde matricen V_{m+1} har determinant $\det(V_{m+1}) \neq 0$, idet

$$V_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^m \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \dots & z_m^m \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

$$\det(V_{m+1}) = \prod_{0 \leq j < k \leq m} (z_k - z_j). \tag{1.2}$$

(Kunne du overhovedet se andre strategier end at bruge lineær algebra!?)

2 Basis og dimension

(1) Bevis at $\mathbb{F}[z]$ ikke har endelig dimension.
(*Vink:* Indse at argumentet side 49 nederst i [LNS] ikke er fyldestgørende—det skal kombineres med en entydighedssætning for polynomier.)

(2) Godtgør at $(1, z, z^2, \dots, z^m)$ er et lineært uafhængigt sæt i $\mathbb{F}[z]$ for hvert heltal $m \geq 0$.

Generaliser til at $(1, z-a, (z-a)^2, \dots, (z-a)^m)$ er lineært uafhængigt for et vilkåligt givet tal $a \in \mathbb{F}$.

Forklar også, hvorfor argumentet i Example 5.2.5 i [LNS] er ufuldstændigt !

(3) Bestem en basis for $\mathbb{F}_m[z]$, og angiv $\dim(\mathbb{F}_m[z])$—husk at give begrundelser ! Har $\mathbb{F}[z]$ en basis ?

(4) Idet $U = \operatorname{span}(z, (z+1)^2)$ i $V = \mathbb{F}_2[z]$, angiv da et underrum W således at $V = U \oplus W$. (*Vink:* Gør som i beviset for Theorem 5.4.5.)

(5) *Suppler* $(z, (z+1)^2)$ til en basis for $\mathbb{C}_3[z]$.

(6) Er sættet $(z^2-2, (z+1)^2, (z+2)^2, (z+3)^2)$ lineært uafhængigt i $\mathbb{C}_2[z]$? Hvis ikke, så skal sættet *udtyndes* til en basis !

(7) Bevis at $(z^m, (z+1)^m, \dots, (z+m)^m)$ er en basis for $\mathbb{F}_m[z]$. (*Vink:* Hvilken nødvendig betingelse for at være en basis er åbentlyst opfyldt for dette sæt?)

3 Lineære afbildninger

(1) Efterprøv at differentiation $D = \frac{d}{dz}$ er en lineær afbildning $\mathbb{F}[z] \to \mathbb{F}[z]$, dvs. at D er en endomorfi på $\mathbb{F}[z]$.

Vink: For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan man opfatte D symbolsk, således at hvert led af formen az^m blot *erstattes* med maz^{m-1} (uden at involvere differenskvotienter).

(2) Bestem $\operatorname{null}(D)$ som et underrum af $\mathbb{F}[z]$. (Husk den ikke-trivielle del af argumentet!)

(3) Undersøg om D er en endomorfi på $\mathbb{F}_m[z]$.

Opskriv udsagnet i dimensionssætningen for $D\colon \mathbb{F}_m[z] \to \mathbb{F}_m[z]$ og kommenter resultatet.

(4) Verificer at $T\colon \mathbb{F}[z] \to \mathbb{F}[z]$ givet ved $T(p) = z^2 p(z)$ er injektiv (som hævdet i Example 6.2.7). Undersøg om T er surjektiv.

(5) Find matricen $M(D)$ mht. standardbasen $(1, z, \ldots, z^m)$ for $\mathbb{F}_m[z]$.

Hvilken type matrix er dette ?

(6) Find matricen $M(D)$ mht. basen $(1, z - \mathrm{i}, \ldots, (z - \mathrm{i})^m)$ for $\mathbb{C}_m[z]$. Er der en modstrid med svaret i (5) ?

(7) Er vektorummene $\mathbb{F}_m[z]$ og $\mathbb{F}^k$ isomorfe for nogen værdier af m, k ? Nedskriv i så fald en konkret isomorfi.

4 Egeninformation

(1) Angiv en egenværdi for D, og bestem det tilhørende egenrum V_λ. (*Vink:* Analyser egenværdiligningen for D.) Hvad er $\dim V_\lambda$?

(2) Find samtlige egenværdier for D^2 og angiv de tilhørende egenrum.

(*Vink:* Inddrag matrixmultiplikation.)

(3) Undersøg om D har $\{p \in \mathbb{F}[z] \mid p(z) = az^m,\ a \in \mathbb{F}\}$ som et invariant underrum. Har D overhovedet et invariant underrum ?

(4) Find TO invariante underrum U_1, U_2 for D^2, som begge har uendelig dimension uden at være $\mathbb{F}[z]$.

(5) Skriv udsagnene i Proposition 7.5.2 ud i detaljer for $D \in \mathcal{L}(\mathbb{F}_m[z])$ ifm. standardbasen—sammenlign sandhedsværdierne !

(6) Samme øvelse med Proposition 7.5.4.

5 Ortonormale baser og koordinatskifte

(1) Vis i detaljer at $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(z)\bar{q}(z)\,dz$ definerer et indre produkt på $\mathbb{F}[z]$ (Example 9.1.5)—skal du bruge entydighedssætningen for polynomier ?

(2) Udregn det indre produkt af $p(z) = z + z^3$ og $q(z) = z^2$.

Find den inducerede norm af $p(z)$ og af $q(z)$. Check om Cauchy–Schwarz's ulighed er korrekt i dette tilfælde. Undersøg også om trekantsuligheden gælder for $p + q$.

(3) Udfør Gram–Schmidts ortonormalisering på $(1, z, z^2)$ for at bestemme en ortonormal basis for $\mathbb{F}_2[z]$. Find koordinaterne i denne basis for $p(z) = 7 + 9z$.

(4) Bestem ortogonal projektionen af z^3 på underrummet $U = \operatorname{span}(1, z, z^2)$.

6 Tema: Global approximation

I $\mathbb{R}_m[x]$ er der et indre produkt givet ved $\langle p, q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)\,dx$. Det ses let at også $V = C([-\pi,\pi])$ har integralet over $[-\pi,\pi]$ som indre produkt—man kan bruge uden bevis dels dette, dels at formel (9.6) i [LNS] for P_U også gælder, selvom V ikke har endelig dimension (Mat6).

(1) Udfør Gram-Schmidts procedure på vektorerne $(1, x, x^2, x^3)$ for at finde en ortonormal basis (e_1, e_2, e_3, e_4) for $\mathbb{R}_3[x]$ mht. *dette* indre produkt. (Knofedt !)

Uden garanti: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}\pi^{-3/2}x$, $e_3 = \frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\pi^{-5/2}x^2 - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\pi^{-1/2}$, $e_4 = \frac{\sqrt{175}}{2\sqrt{2}}\pi^{-7/2}x^3 - \frac{3\sqrt{175}}{10\sqrt{2}}\pi^{-3/2}x$.

(2) Bestem de indre produkter $\langle \sin, x^j\rangle$ for $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(3) *Find ortogonal projektionen af $\sin x$ på $U = \mathbb{R}_3[x]$.

Uden garanti: $P_U \sin = \frac{315-15\pi^2}{2\pi^4}x - \frac{525-35\pi^2}{2\pi^6}x^3$.

(4) Nedskriv det integral som minimeres af polynomiet $P_U \sin$ (jvf. sætning 9.6.6 i [LNS]).

(5) Sammenlign resultatet med Taylor polynomiet af grad 3, dvs. $x - x^3/6$.

For at få en ide om, hvorledes man (ingeniører) repræsenterer f.eks. sinus i en lommeregner, så kan man læse om ortogonal projektionen af sinus på $\operatorname{span}(1, x, \ldots, x^5)$ i Example 6.58 (side 199–200) i *Linear algebra done right* af Sheldon Axler:

`http://www.linear.axler.net/InnerProduct.pdf`

Der er nydelige figurer ! (Jvf. semester introduktionen.)

7 Tema: Lagrange polynomier

Et klassisk problem er følgende:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Givet } m+1 \text{ punkter i } xy\text{-planen} \\ \qquad (x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \dots,\ (x_m, y_m) \\ \text{med forskellige første koordinater, find da et polynomium } P(x) \text{ af} \\ \text{grad højst } m, \text{ således at } P\text{'s graf går gennem de } m+1 \text{ givne punkter.}\end{array}\right\} \tag{7.1}$$

Opgaven har en overraskende elegant og enkel løsning i den såkaldte Lagrange interpolation. Polynomiet P er nemlig entydigt bestemt ved formlen

$$P(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_m\ell_m(x),$$

hvorved x_j-værdierne indgår i problemets såkaldte Lagrange polynomier, der med 'guddommelig' inspiration kan nedskrives en gang for alle,

$$\ell_j(x) = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \cdots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \cdot \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \cdots \frac{x - x_m}{x_j - x_m} = \prod_{k=0, k\neq j}^{m} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Dette vil vi nu regne efter ved at bruge lineær algebra !

(1) Forklar hvorfor $\ell_j(x)$ er et veldefineret polynomium af grad lig med m (kan nævneren blive nul?), og konkluder at $\ell_j \in \mathbb{R}_m[x]$.

Prøv så efter at $\ell_j(x)$ løser opgaven i det specialtilfælde, at $y_j = 1$ mens alle andre $y_k = 0$. I detaljer betyder dette at

$$\ell_j(x_k) = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 \text{ for } j = k, \\ 0 \text{ for } j \neq k. \end{cases}$$

(2) Godtgør at $P(x)$ rent faktisk er et polynomium i $\mathbb{R}_m[x]$, hvis graf går gennem de givne $m + 1$ punkter.

(3) Udled først at sættet $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)$ er lineært uafhængigt (brug (1)).

Godtgør så teoretisk, at $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)$ også er et frembringersæt for $\mathbb{R}_m[x]$.

(4) Og så konkret: Givet et polynomium $Q(x)$ af grad m, hvilken linearkombination fremstiller så Q; hvordan skal koordinaterne nødvendigvis vælges ? (*Vink:* Lav en analyse.)

(5) Konkluder endelig, vha. (4), at hvis $Q \in \mathbb{R}_m[x]$ er en løsning af problemet, så er $Q(x) = P(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, dvs. $Q \equiv P$.

Bemærk, at konklusionen i (5) faktisk *beviser* Den 'ultrastærke' Entydighedssætning for polynomier !

Moralen er, at vi undgik Vandermonde determinanten fordi vi med $(\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)$ havde valgt en *snedig* basis !

8 Tema: Stambrøker

En velkendt teknik består i at omskrive en given brøk af polynomier $P(z)/Q(z)$ så den kommer på formen, hvor $b_m \neq 0$,

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m-1} z^{m-1}}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} = \frac{c_1}{z - r_1} + \cdots + \frac{c_m}{z - r_m}. \tag{8.1}$$

Udtrykket til højre kaldes en fremstillning af P/Q ved stambrøker. Thi P/Q stammer fra brøkerne i den forstand, at P/Q kan gendannes ved at sætte disse brøker på fælles brøkstreg.

Fremstillingen i (8.1) er eksempelvis nyttig, hvis man skal integrere funktionen $P(x)/Q(x)$. Desuden bruges den også som forberedelse til invers Laplace-transformering ved løsning af differentialligninger med begyndelsesbetingelser.

Vi skal nu se at fremstillingen ved stambrøker i (8.1) altid eksisterer når det forudsættes at

$$\deg(P) < m = \deg(Q). \tag{8.2}$$

(Dette er for simpelhedens skyld, da man for $\deg(P) \geq \deg(Q)$ kan reducere til ovenstående situation ved at foretage polynomiers division først.)

Som et hjælpemiddel indføres polynomierne q_j for $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$q_j(z) = \prod_{k=1, k \neq j}^{m} (z - r_k). \tag{8.3}$$

Tallene $r_1, \ldots, r_m$ bestemmes i praksis (nødvendigvis) som rødderne i nævneren, dvs. at $Q(z) = b_m(z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_m)$.

(1) Vis at fremstillingen i (8.1) kan opnås hvis og kun hvis $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ kan vælges sådan at $P(z) = b_m c_1 q_1(z) + b_m c_2 q_2(z) + \cdots + b_m c_m q_m(z)$.

(2) Bevis at $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ er et *frembringersæt* for $\mathbb{C}_{m-1}[z]$ hvis og kun hvis rødderne $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige.

Udled heraf, at når rødderne $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige, så har ligningen for P i (1) på grund af antagelsen (8.2) en (og kun en) løsning $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m$.

(3) Vis at når $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige, da er hvert c_j givet ved

$$\lim_{z \to r_j} \left((z - r_j) \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = c_j. \tag{8.4}$$

(4) Brug (8.4) til at bestemme stambrøkfremstillingen (8.1) for $\frac{z+1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$.

(5) ***Vis at når $Q(z)$ har de indbyrdes forskellige rødder $t_1, \ldots, t_k$ af *multipliciteter* $n_1 \geq 1, \ldots, n_k \geq 1$, hvor $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$, det vil

sige at $Q(x) = b_m(x-t_1)^{n_1}\dots(x-t_k)^{n_k}$, så kan man opnå en stambrøksfremstilling af formen

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{k}\left(\frac{c_{j,1}}{z-t_j} + \frac{c_{j,2}}{(z-t_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,n_j}}{(z-t_j)^{n_j}}\right). \tag{8.5}$$

Vink: Brug $(z-t_j)^{n_j}$ som fællesnævner i parentesen, og find dernæst fællesnævneren $Q(x)/b_m$ for alle leddene med $j \in 1,\dots,k$ mens deres tællere indeholder hjælpepolynomierne $q_{j,n}(x) = \frac{Q(x)b_m^{-1}}{(x-t_j)^n}$ hvor $n \in \{1,2,\dots,n_j\}$. Udled så at $P \in \operatorname{span}\{q_{j,n} \mid j=1,\dots,k;\ n=1,\dots,n_j\}$ når dette system er lineært uafhængigt, og påvis lineær uafhængighed ved at indsætte $x = t_1$ etc. i $\sum_{j=1}^{k}\sum_{n=1}^{n_j}\alpha_{j,n}q_{j,n}(x) \equiv 0$. (Når $\alpha_{1,n_1} = 0$ kan ligningen divideres med $x - t_1$; den nye ligning gælder også for $x = t_j$ pga. kontinuitet.)

Vis også at der i dette tilfælde gælder at

$$\lim_{z\to t_j}\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\left((z-t_j)^{n_j}\frac{P(z)}{Q(z)}\right) = c_{j,n_j-m}. \tag{8.6}$$

(Dette kræver dog kompleks differentiation (Mat4), medmindre t_j er reel.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen