Miniprojekt: Lineær algebra på polynomier

Grupperne forventes at regne de 'små' opgaver i afsnittene 1–5 i løbet af de første 4 halve dage. Dernæst tilføjes 3 lidt større temaopgaver, som regnes de sidste 3 halve dage.

Hver person kan aflevere en skriftlig besvarelse af en af disse temaopgaver, efter eget valg. Opgaven sendes fredag den 13. oktober i en PDF-fil til Oliver Matte, som returnerer den med kommentarer i løbet af uge 43 (formentlig): `oliver@math.aau.dk`

Undervejs kan vi mødes i auditoriet, eksempelvis i de sidste 20 minutter af en halvdag for at diskutere en af opgaverne efter behov (aftales undervejs i gruppelokalerne). Vi har aftalt at mødes i auditoriet mandag den 9. oktober kl. 8.15 til en kort optakt.

1 Vektorrum

(1) Giv et argument for at $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ er (organiseret som) et vektorrum over $\mathbb{C}$, idet $z \in \mathbb{C}$ betegner en komplex variabel. Gælder det samme om $\mathcal{P}(\mathbb{R})$? Hvad så med $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ som vektorrum over $\mathbb{R}$?

(2) Godtgør at $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ er et underrum af $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. Angiv nulvektoren præcist (tænk på at det er en funktion).

(3) Angiv $\mathcal{P}_0(\mathbb{F})$, $\mathcal{P}_1(\mathbb{F})$ og $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$ med mængdesymboler. Bestem dernæst et frembringersæt for $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$, og begrund at $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ har endelig dimension iht. definitionen.

(4) Bevis at $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ ikke har endelig dimension.
(*Vink:* Brug resultatet i opgave (5) nedenfor.)

(5) *Entydighedssætningen for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ er ens som funktioner $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$, så har p, q de samme koefficienter.
Bevis denne ! (*Vink:* Se eller gense et resultat fra kapitel 4 i [SA].)

(6) *Den stærke Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ stemmer overens i en omegn af 0 i $\mathbb{F}$, så har p, q de samme koefficienter.
(*Vink:* For $x = 0$ kan man benytte et kontinuitetsargument!)

(7) *Den 'hyperstærke' Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ opfylder

$$p(0) = q(0) \text{ og } p^{(k)}(0) = q^{(k)}(0) \text{ for } k \in \{1, \dots, m\}, \tag{1.1}$$

så har p, q de samme koefficienter.

(8) ****Den ‘ultrastærke’ Entydighedssætning for polynomier:* Hvis $p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$ begge har grad mindre end eller lig med m og stemmer overens i $m+1$ forskellige punkter $z_0, z_1, \dots, z_m$ i $\mathbb{F}$, så har p, q de samme koefficienter (og er derfor ens som funktioner $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$).

I beviset får man nok brug for at vise at Vandermonde matricen V_{m+1} har determinant $\det(V_{m+1}) \neq 0$, idet

$$V_{m+1} = \begin{pmatrix} 1 & z_0 & z_0^2 & \dots & z_0^m \\ 1 & z_1 & z_1^2 & \dots & z_1^m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & z_m & z_m^2 & \dots & z_m^m \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

$$\det(V_{m+1}) = \prod_{0 \le j < k \le m} (z_k - z_j). \tag{1.3}$$

(Kunne du overhovedet se andre strategier end at bruge lineær algebra!?)

2 Basis og dimension

(1) Godtgør at $(1, z, z^2, \dots, z^m)$ er et lineært uafhængigt sæt i $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ for hvert heltal $m \geq 0$.

Generaliser til at $(1, z-a, (z-a)^2, \dots, (z-a)^m)$ er lineært uafhængigt for et vilkåligt givet tal $a \in \mathbb{F}$. (Kan du finde TO beviser for dette ?)

(2) Bestem en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$, og angiv $\dim(\mathcal{P}_m(\mathbb{F}))$—husk at give begrundelser !

Har $\mathcal{P}(\mathbb{F})$ en basis ?

(3) Idet $U = \operatorname{span}(z, (z+1)^2)$ i $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{F})$, angiv da en direkte summand W, dvs. et underrum således at $V = U \oplus W$.
(*Vink:* Gør som i beviset for sætning 2.34)

(4) *Suppler* $(z, (z+1)^2)$ til en basis B for $\mathcal{P}_3(\mathbb{C})$.

Bestem dernæst koordinatsøjlen $[v]_B$ for $v = z^2 - 1$.

(5) Er sættet $(z^2-2, (z+1)^2, (z+2)^2, (z+3)^2)$ lineært uafhængigt i $\mathcal{P}_2(\mathbb{C})$?
Hvis ikke, så skal sættet *udtyndes* til en basis !

(6) Bevis at $(z^m, (z+1)^m, \dots, (z+m)^m)$ er en basis for $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$. (*Vink:* Hvilken nødvendig betingelse for at være en basis er åbentlyst opfyldt for dette sæt?)

3 Lineære afbildninger

(1) Efterprøv at differentiation $D = \frac{d}{dz}$ er en lineær afbildning $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}(\mathbb{F})$, dvs. at D er en operator på $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

Vink: For $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ kan man opfatte D symbolsk, således at hvert led af formen az^m blot *erstattes* med maz^{m-1} (uden at involvere differenskvotienter).

(2) Bestem $\mathrm{null}(D)$ som et underrum af $\mathcal{P}(\mathbb{F})$. (Husk den ikke-trivielle del af argumentet!)

(3) Undersøg om D er en operator på $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

Opskriv udsagnet i dimensionssætningen for $D\colon \mathcal{P}_m(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ og kommenter resultatet.

(4) Verificer at $T\colon \mathcal{P}(\mathbb{F}) \to \mathcal{P}(\mathbb{F})$ givet ved $T(p) = x^2 p(x)$ er injektiv (som hævdet side 53 i [SA]). Undersøg om T er surjektiv.

(5) Find matricen $M(D)$ mht. standardbasen $(1, z, \ldots, z^m)$ for $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$.

Hvilken type matrix er dette ?

(6) Find matricen $M(D)$ mht. basen $(1, z - \mathrm{i}, \ldots, (z - \mathrm{i})^m)$ for $\mathcal{P}_m(\mathbb{C})$. Er der en modstrid med svaret i (5) ?

(7) Er vektorummene $\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$ og $\mathbb{F}^k$ isomorfe for nogen værdier af m, k ? Nedskriv i så fald en konkret isomorfi.

4 Egeninformation

(1) Angiv en egenværdi for $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$, og bestem det tilhørende egenrum E_λ. (*Vink:* Analyser egenværdiligningen for D.) Hvad er $\dim E_\lambda$?

Er operatoren $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$ diagonaliserbar ?

(2) Find samtlige egenværdier for D^2 og angiv de tilhørende egenrum.

(*Vink:* Inddrag matrixmultiplikation.)

(3) Undersøg om $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}))$ givet ved at $Tp(x) = x^2 D^2 p(x)$ er en diagonaliserbar operator.

(4) Undersøg om D har $\{p \in \mathcal{P}(\mathbb{F}) \mid p(z) = az^m,\ a \in \mathbb{F}\}$ som et invariant underrum, når $m \in \mathbb{N}$ er fast valgt.

Hvilke invariante underrum har D i det hele taget ?

(5) Find TO invariante underrum U_1, U_2 for D^2, som begge har uendelig dimension uden at være $\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(6) Skriv udsagnene i sætning 5.26 ud i detaljer for $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{F}))$ i forbindelse med standardbasen—sammenlign sandhedsværdierne !

(7) Samme øvelse med sætning 5.30 og 5.32.

5 Ortonormale baser og projektion

(1) Vis i detaljer at $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(z)\bar{q}(z)\,dz$ definerer et indre produkt på $\mathcal{P}(\mathbb{F})$—skal du bruge entydighedssætningen for polynomier ?

(2) Udregn det indre produkt af $p(z) = z + z^3$ og $q(z) = z^2$.

Find den inducerede norm af $p(z)$ og af $q(z)$. Check om Cauchy–Schwarz's ulighed er korrekt i dette tilfælde.

Undersøg også om trekantsuligheden gælder for $p + q$.

(3) Udfør Gram–Schmidts ortonormalisering på $(1, z, z^2)$ for at bestemme en ortonormal basis for $\mathcal{P}_2(\mathbb{F})$.

Find koordinaterne i denne basis for $p(z) = 7 + 9z$.

(4) Bestem ortogonal projektionen af z^3 på underrummet $U = \mathrm{span}(1, z, z^2)$.

6 Tema: Global approximation

I $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ er der et indre produkt givet ved

$$\langle p, q\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} p(x)q(x)\,dx. \tag{6.1}$$

Det ses let at også $V = C([-\pi,\pi],\mathbb{R})$ har integralet over $[-\pi,\pi]$ som indre produkt—og formlen for P_U i sætning 6.55 (i) gælder også, selvom V ikke har endelig dimension (ses af beviset for sætning 6.47 i formel 6.49).

(1) Udfør Gram-Schmidts procedure på vektorerne $(1, x, x^2, x^3)$ for at finde en ortonormal basis (e_1, e_2, e_3, e_4) for $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ mht. *dette* indre produkt. (Knofedt !)

Uden garanti:

$$\begin{aligned}
e_1 &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}},\\
e_2 &= \sqrt{\tfrac{3}{2}}\pi^{-3/2}x,\\
e_3 &= \tfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\pi^{-5/2}x^2 - \tfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\pi^{-1/2},\\
e_4 &= \tfrac{\sqrt{175}}{2\sqrt{2}}\pi^{-7/2}x^3 - \tfrac{3\sqrt{175}}{10\sqrt{2}}\pi^{-3/2}x.
\end{aligned}$$

(2) Bestem de indre produkter $\langle \sin, x^j\rangle$ for $j \in \{0,1,2,3\}$.

(3) *Find ortogonal projektionen i V af $\sin x$ på underrummet $U = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Uden garanti: $P_U \sin = \frac{315-15\pi^2}{2\pi^4}x - \frac{525-35\pi^2}{2\pi^6}x^3$.

(4) Nedskriv det integral som minimeres af polynomiet $P_U \sin$ (jvf. sætning 6.56 i [SA]).

(5) Sammenlign resultatet med Taylor polynomiet af grad 3, dvs. $x - x^3/6$.

For at få en ide om, hvorledes man (ingeniører) repræsenterer f.eks. sinus i en lommeregner, så kan man læse om ortogonal projektionen af sinus på $\operatorname{span}(1, x, \ldots, x^5)$ i Example 6.58 i [SA]. (Jvf. introduktionen i tirsdags.)

7 Tema: Lagrange polynomier

Et klassisk problem er følgende:

$$(7.1)\qquad \begin{cases} \text{Givet } m+1 \text{ punkter i } xy\text{-planen} \\ \qquad (x_0,y_0),\ (x_1,y_1),\ \dots,\ (x_m,y_m) \\ \text{med forskellige første koordinater, find da et polynomium } P(x) \text{ af} \\ \text{grad højst } m\text{, således at } P\text{'s graf går gennem de } m+1 \text{ givne punkter.} \end{cases}$$

En overraskende elegant og enkel løsning er den såkaldte *Lagrange interpolation:* Polynomiet $P(x)$ er nemlig entydigt bestemt ved formlen

$$(7.2)\qquad P(x) = y_0\ell_0(x) + y_1\ell_1(x) + \cdots + y_m\ell_m(x),$$

hvorved x_j-værdierne indgår i problemets såkaldte Lagrange polynomier, der med 'guddommelig' inspiration kan nedskrives en gang for alle,

$$(7.3)\qquad \begin{aligned} \ell_j(x) &= \frac{x-x_0}{x_j-x_0}\cdots\frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}}\cdot\frac{x-x_{j+1}}{x_j-x_{j+1}}\cdots\frac{x-x_m}{x_j-x_m} \\ &= \prod_{k=0,k\neq j}^{m}\frac{x-x_k}{x_j-x_k}. \end{aligned}$$

Dette vil vi nu regne efter ved at bruge lineær algebra !

(1) Forklar hvorfor hvert $\ell_j(x)$ er et veldefineret polynomium af grad m (kan nævneren blive nul?), og konkluder så at $\ell_j \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.

Prøv så efter at $\ell_j(x)$ løser opgaven i(7.1) i det specialtilfælde, at $y_j = 1$ mens alle andre $y_k = 0$. I detaljer betyder dette at

$$\ell_j(x_k) = \delta_{j,k} := \begin{cases} 1 \text{ for } j = k, \\ 0 \text{ for } j \neq k. \end{cases}$$

(2) Godtgør at $P(x)$ i (7.2) rent faktisk er et polynomium i $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$, og at P's graf går gennem de givne $m+1$ punkter (så (7.1) har mindst en løsning).

(3) Udled først at sættet $\mathcal{B} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)$ er lineært uafhængigt (brug (1)).

Godtgør så teoretisk, at $\mathcal{B}$ også er et frembringersæt for $\mathcal{P}_m(\mathbb{R})$.

(4) Og så konkret: Givet et polynomium $Q(x)$ af grad m, hvilken linearkombination af vektorerne i $\mathcal{B}$ fremstiller så Q—dvs. hvordan skal koordinatsøjlen $[Q]_{\mathcal{B}}$ nødvendigvis vælges ? (*Vink:* Lav en analyse.)

(5) Konkluder endelig, vha. (4), at hvis $Q \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R})$ er en løsning af problemet i (7.1), så er $Q(x) = P(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$, dvs. $Q \equiv P$.

Bemærk, at konklusionen i (5) faktisk *beviser* Den 'ultrastærke' Entydighedssætning for polynomier !

Morale: Vi undgik Vandermonde determinanten $\det(V_{m+1})$ i (1.3), fordi vi med $\mathcal{B} = (\ell_0, \ell_1, \dots, \ell_m)$ havde valgt en *snedig* basis !

8 Tema: Stambrøker

En velkendt teknik består i at omskrive en given brøk af polynomier $P(z)/Q(z)$ så den kommer på formen, hvor $b_m \neq 0$,

$$\text{(8.1)} \qquad \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m-1} z^{m-1}}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m} = \frac{c_1}{z - r_1} + \cdots + \frac{c_m}{z - r_m}.$$

Udtrykket til højre kaldes en fremstillning af P/Q ved stambrøker. Thi P/Q stammer fra brøkerne i den forstand, at P/Q kan gendannes ved at sætte disse brøker på fælles brøkstreg.

Fremstillingen i (8.1) er eksempelvis nyttig, hvis man skal integrere funktionen $P(x)/Q(x)$. Desuden bruges den også som forberedelse til invers Laplace-transformering ved løsning af differentialligninger med begyndelsesbetingelser.

Vi skal nu se at fremstillingen ved stambrøker i (8.1) altid eksisterer når det forudsættes at

$$\text{(8.2)} \qquad \deg(P) < m = \deg(Q).$$

(Dette er for simpelhedens skyld, da man for $\deg(P) \geq \deg(Q)$ kan reducere til ovenstående situation ved at foretage polynomiers division først.)

Som et hjælpemiddel indføres polynomierne q_j for $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$,

$$\text{(8.3)} \qquad q_j(z) = \prod_{k=1, k \neq j}^{m} (z - r_k).$$

Tallene $r_1, \ldots, r_m$ bestemmes i praksis (nødvendigvis) som rødderne i nævneren, dvs. at $Q(z) = b_m(z - r_1)(z - r_2) \ldots (z - r_m)$.

(1) Vis at fremstillingen i (8.1) kan opnås hvis og kun hvis $c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ kan vælges sådan at $P(z) = b_m c_1 q_1(z) + b_m c_2 q_2(z) + \cdots + b_m c_m q_m(z)$.

(2) Bevis at $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ er et *frembringersæt* for $\mathcal{P}_{m-1}(\mathbb{C})$ hvis og kun hvis rødderne $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige.

Udled heraf, at når rødderne $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige, så har ligningen for P i (1) på grund af antagelsen (8.2) en (og kun en) løsning $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathbb{C}^m$.

(3) Vis at når $r_1, \ldots, r_m$ er indbyrdes forskellige, da er hvert c_j givet ved

$$\text{(8.4)} \qquad \lim_{z \to r_j} \left((z - r_j) \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = c_j.$$

(4) Brug (8.4) til at bestemme stambrøkfremstillingen (8.1) for $\frac{z+1}{z^3 - 3z^2 + 2z}$.

(5) ***Vis at når $Q(z)$ har de indbyrdes forskellige rødder $t_1, \ldots, t_k$ af *multipliciteter* $n_1 \geq 1, \ldots, n_k \geq 1$, hvor $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = m$, det vil

sige at $Q(x) = b_m(x - t_1)^{n_1} \dots (x - t_k)^{n_k}$, så kan man opnå en stambrøksfremstilling af formen

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{c_{j,1}}{z - t_j} + \frac{c_{j,2}}{(z - t_j)^2} + \dots + \frac{c_{j,n_j}}{(z - t_j)^{n_j}} \right). \tag{8.5}$$

Vink: Brug $(z - t_j)^{n_j}$ som fællesnævner i parentesen, og find dernæst fællesnævneren $Q(x)/b_m$ for alle leddene med $j \in 1, \dots, k$ mens deres tællere indeholder hjælpepolynomierne $q_{j,n}(x) = \frac{Q(x)b_m^{-1}}{(x-t_j)^n}$ hvor $n \in \{1, 2, \dots, n_j\}$. Udled så at $P \in \operatorname{span}\{q_{j,n} \mid j = 1, \dots, k;\ n = 1, \dots, n_j\}$ når dette system er lineært uafhængigt, og påvis lineær uafhængighed ved at indsætte $x = t_1$ etc. i $\sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{n_j} \alpha_{j,n} q_{j,n}(x) \equiv 0$. (Når $\alpha_{1,n_1} = 0$ kan ligningen divideres med $x - t_1$; den nye ligning gælder også for $x = t_j$ pga. kontinuitet.)

Vis også at der i dette tilfælde gælder at

$$\lim_{z \to t_j} \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} \left((z - t_j)^{n_j} \frac{P(z)}{Q(z)} \right) = c_{j,n_j - m}. \tag{8.6}$$

(Dette kræver dog kompleks differentiation (Mat4), medmindre t_j er reel.)

Med venlig hilsen
Jon Johnsen