Algebra 1

16. kursusgang, torsdag den 20. november

Selvstudium i grupperne 8.15-12.00

Læs afsnit 2.9.5 i Lauritzens bog og side 441-447 i Biggs (Heri indgår et par sider om diedergrupper som tidligere er læst.)

Opgaver

- De fire opgaver på side 443 i Biggs. Biggs-facit
- Antag at 15-puslespillet starter i følgende konfiguration

1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	

Er det muligt med lovlige træk at opnå den sædvanlige slutkonfiguration:

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

- Lad Q være terningen i $\mathbb{R}^3$ med hjørner (1,1,1), (1,1,-1), (1,-1,1), (1,-1,-1), (-1,1,1), (-1,1,-1), (-1,1,-1), (-1,-1,-1).
  Lad G være gruppen af alle rotation i $\mathbb{R}^3$, der afbilder Q i sig selv. (Spejlinger er ikke inkluderet i G. G er altså en undergruppe af SO(3,$\mathbb{R}$): ortogonale 3x3 matricer med determinant 1.)
  1. Vis stabilisatoren $G_{(1,1,1)}$ har orden 3. Altså at G har tre rotationer (inklusiv den identiske afbildning) der afbilder punktet (1,1,1) i sig selv.
  2. Vis at G har orden 24.
  3. Q har fire diagonaler, som kan numereres 1,2,3,4, f.eks.:
     Diagonal nr. 1: mellem punkterne (1,1,1) og (-1,-1,-1),
     Diagonal nr. 2: mellem punkterne (1,1,-1) og (-1,-1,1),
     Diagonal nr. 3: mellem punkterne (1,-1,1) og (-1,1,-1),
     Diagonal nr. 4: mellem punkterne (-1,1,1) og (1,-1,-1).
     Vis at der for alle $\{i,j\}\subseteq\{1,2,3,4\}$ findes en rotation der ombytter diagonal nr. i og nr. j og afbilder de to andre diagonaler i sig selv (men ændrer retningen af de diagonaler der afbildes i sig selv).
  4. Vis at G er isomorf med S_4.

- En fodbold af består 12 femkanter og 20 sekskanter, se football. På billedet er vist hvordan man kan tegne et Ikosaeder med et punkt midt i hver af de 12 femkanter. Tilsvarende kan man tegne et dodekaeder med et punkt midt i hver af de 20 sekskanter, se wiki/Dodecahedron.

Lad G være gruppen af alle rotation i $\mathbb{R}^3$ der afbilder en fodbold (eller et dodecaeder eller et ikosaeder) i sig selv.

1. Vis at G har orden 60.
2. Billedet i wiki/Dodecahedron og koordianterne for punkterne viser at der er en terning, hvis otte hjørner også er hjørner i dodekaederet.
   Vis at der er at for ethvert hjørne i et dodekaeder findes to terninger, der har dette punkt som et af hjørnerne.
   Vis at der dermed er fem sådanne terninger indskrevet i et dodekaeder.

En rotation i G permuterer de fem indskrevne terninger. Man kan bevise at G er isomorf med A_5.

- Lad $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ være legemet med fem elementer. Lad $GL(2,\mathbb{F}_5)$ være mængden af invertible 2x2 matricer over $\mathbb{F}_5$. Determinanten af en matrix i $GL(2,\mathbb{F}_5)$ beregnes på den sædvanlige måde og opfylder sædvanlige regneregler for determinant. det: $GL(2,\mathbb{F}_5) \to \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$ er altså en homomorfi.
  1. Bestem ordenen af $GL(2,\mathbb{F}_5)$.
  2. Vis at det: $GL(2,\mathbb{F}_5) \to \mathbb{F}_5 \setminus \{0\}$ er surjektiv.
  3. Lad $SL(2,\mathbb{F}_5)$ (den specielle lineære gruppe) betegne kernen af 'det'. Bestem ordenen af $SL(2,\mathbb{F}_5)$.
  4. Lad $Z = \{ aI_2 \mid a \in \mathbb{F}_5\} \cap SL(2,\mathbb{F}_5)$. Bestem alle elementer i Z.
  5. Vis Z er en normal undergruppe af $SL(2,\mathbb{F}_5)$.
  6. Lad $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ betegne kvotientgruppen $SL(2,\mathbb{F}_5) / Z$. Bestem ordenen af $PSL(2,\mathbb{F}_5)$.

  Man kan vise at $PSL(2,\mathbb{F}_5)$ er isomorf med A_5.