DMat-22

En (binær) relation R på en mængde $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ kan repræsenteres af

- den orienterede graf (A, R). Altså grafen med et punkt for hvert element i A og en kant orienteret fra a_i til a_j hvis $a_i R a_j$.

- $n \times n$ matricen $M_R = [m_{ij}]$ hvor

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis } a_i R a_j \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Lad R være en relation på en mængde A
og lad $G = (A, R)$ være den orienterede graf der repræsenterer R.

- R er refleksiv hvis og kun hvis G har en loop på hvert punkt.

- R er symmetrisk hvis og kun hvis der for enhver kant (a, b) i G er en kant (b, a) i G.

- R er transitiv hvis og kun hvis G opfylder at når der er en orienteret vej fra a til b så er kanten (a, b) også i G.

Lad R være en relation på en mængde A
og lad M_R være matricen der repræsenterer R.

- R er refleksiv hvis og kun hvis M_R har 1'taller på alle diagonalindgange.

- R er symmetrisk hvis og kun hvis M_R er symmetrisk.

Den **refleksive afslutning** af en relation R på mængden A er den mindste refleksive relation på A, der indeholder R.

Den fås ved at tilføje (a, a) til R for alle $a \in A$.

Den **symmetriske afslutning** af en relation R på mængden A er den mindste symmetriske relation på A, der indeholder R.

Den fås ved at tilføje (b, a) til R for alle $(a, b) \in R$.

Den **transitive afslutning** af en relation R på mængden A er den mindste transitive relation på A, der indeholder R.

Den transitive afslutning af R er relationen R^* hvor

$$R^* = \{(a, b) \mid \text{grafen der repræsenterer } R \text{ har en vej fra } a \text{ til } b\}.$$

$0-1$ **matricer.**
Bitoperationer $\vee$ og $\wedge$ er defineret ved

$$0 \vee 0 = 0 \quad 0 \vee 1 = 1 \quad 1 \vee 0 = 1 \quad 1 \vee 1 = 1,$$

$$0 \wedge 0 = 0 \quad 0 \wedge 1 = 0 \quad 1 \wedge 0 = 0 \quad 1 \wedge 1 = 1.$$

Lad $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ være $n \times n$, $0-1$ matricer.

$S = [s_{ij}] = A \vee B$ defineres ved $s_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij}$.
(Eller bestem den sædvanlige matrix sum $A + B$ og erstat alle 2'taller med 1 for at få $A \vee B$.)

$T = [t_{ij}] = A \wedge B$ defineres ved $t_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}$.

$P = [p_{ij}] = A \odot B$ defineres ved

$$p_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}).$$

(Eller bestem det sædvanlige matrix produkt AB og erstat alle tal større end 1 med 1 for at få $A \odot B$.)

Lad R og S være relationer på mængden $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Så er

$$M_{S \cup R} = M_S \vee M_R$$

$$M_{S \cap R} = M_S \wedge M_R$$

$$M_{S \circ R} = M_R \odot M_S$$

Warshalls algoritme:

Beregning af den transitive afslutning R^* af R

procedure Warshall (M_R: $n \times n$, $\{0, 1\}$ matrix)

$W := M_R$ $\{W = [w_{ij}]\}$

$k := 0$

while $k < n$

  $k := k + 1$

  for $i := 1$ **to** n

    for $j := 1$ **to** n

      if $w_{ik} = 1 \wedge w_{kj} = 1$ **then** $w_{ij} := 1$

$\{W = M_{R^*}\}$

En relation $\sim$ på en mængde A siges at være en **ækvivalensrelation** hvis

- $\sim$ er refleksiv,
- $\sim$ er symmetrisk og
- $\sim$ er transitiv.

Hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så defineres for ethvert $a \in A$ **ækvivalensklassen**

$$[a] = \{s \in A \mid a \sim s\}.$$

Hvis A er mængde og hvis K er en mængde af ikke-tomme delmængder af A som opfylder at hvert element i A tilhører præcis én af mængderne i K så siger vi at K er en **klassedeling** af A og mængderne i K kaldes klasser.

Hvis A er en mængde med klassedeling K så er relationen $\sim$ på A defineret

$$a \sim b \Leftrightarrow \; a \text{ og } b \text{ tilhører samme klasse i } K$$

en ækvivalensrelation.

Omvendt, hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så udgør de forskellige ækvivalensklasser en klassedeling af A.

En relation $\preccurlyeq$ på A siges at være en **partiel ordning** hvis

- $\preccurlyeq$ er refleksiv,
- $\preccurlyeq$ er antisymmetrisk og
- $\preccurlyeq$ er transitiv.

$(A, \preccurlyeq)$ siges da at være en partielt ordnet mængde (poset).

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde, der for alle $x, y \in A$ opfylder at enten $x \preccurlyeq y$ eller $y \preccurlyeq x$, så siger vi at ordningen er fuldstændig (eller total eller lineær).

Eksempler:

$(\mathbb{R}, \leq)$ er en partielt ordnet mængde. Denne ordning er fuldstændig.

$(\mathbb{Z}, |)$ er en partielt ordnet mængde. Ordningsrelationen er "går op i".

$(P(S), \subseteq)$ er en partielt ordnet mængde, hvor S er en vilkårlig mængde.

Hvis $(A, \preccurlyeq)$ er en partielt ordnet mængde og $B \subseteq A$ så er $(B, \preccurlyeq)$ også en partielt ordnet mængde.