9.3.

En relation R på en (endelig) mængde A kan repræsenteres af en orienteret graf med punktmængde A og kantmængde R; altså en kant fra a til b hvis aRb.

Hvis relationen er symmetrisk kan de to orienterede kanter (a, b) og (b, a) erstattes af en ikke-orienteret kant $\{a, b\}$.

En relation er transitiv hvis og kun hvis
den opfylder at for ethvert par af punkter (a, b) hvor der er en vej af længde mindst 1 fra a til b gælder at aRb.

Transitiv afslutning af en relation R på en mængde A.

Hvis S_1 og S_2 er transitive relationer på A så er $S_1 \cap S_2$ også en transitiv relation på A.

Der findes en transitiv relation S på A så $R \subseteq S$, f.eks. $S = A \times A$.

Den transitive afslutning af R er den mindste transitive relation S på A som opfylder at $R \subseteq S$.
S er altså fællesmængden af alle transitive relationer, der indeholder R.

På samme måde kan man definere refleksiv afslutning og symmetrisk afslutning (men *ikke* antisymmetrisk afslutning).

Hvis R er en relation på A så er R^* relationen på A der opfylder at aR^*b hvis og kun hvis
grafen der repræsenterer R har en vej fra a til b af længde mindst 1.

R^* er den transitive afslutning af R.

$(a, b) \in R^n$ hvis og kun hvis der er en vej af længde n fra a til b i grafen der repræsenterer R.

Fra afsnit 1.1 har vi følgende bit-operationer: $\vee$ og $\wedge$.

En $0-1$ matrix er en matrix hvor all tal er enten 0 eller 1.

Vi definerer nye operationer på $0-1$ matricer.

Hvis $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er $n \times n$, $0-1$ matricer så er $S = A \vee B$ og $T = A \wedge B$ også $n \times n$, $0-1$ matricer defineret ved $S = [s_{ij}]$ og $T = [t_{ij}]$ hvor

$$s_{ij} = a_{ij} \vee b_{ij},$$

$$t_{ij} = a_{ij} \wedge b_{ij}.$$

Desuden defineres produktet $P = A \odot B$, som også er en $n \times n$, $0 - 1$ matrix ved $P = [p_{ij}]$ hvor

$$p_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \ldots \vee (a_{in} \wedge b_{nj}).$$

Dette kan også skrives som

$$p_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis der findes } \ell \text{ så } \; a_{i\ell} = 1 \wedge b_{\ell j} = 1 \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

En relation R på $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ kan repræsenteres af en $n \times n$ matrix $M_R = [m_{ij}]$, hvor

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ hvis } a_i R b_j \\ 0 \text{ ellers.} \end{cases}$$

Så er

$$M_{S\cup R} = M_S \vee M_R$$

$$M_{S\cap R} = M_S \wedge M_R$$

$$M_{S\circ R} = M_R \odot M_S$$

R: en relation på $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ repræsenteret af matricen M_R.

Bestem matricen M_{R^*}, der repræsenterer relationen

$$R^* = \{(a, b) \in A \times A \mid \text{der findes en vej fra } a \text{ til } b\}.$$

procedure Warshall (M_R: $n \times n$, $\{0, 1\}$ matrix)
$W := M_R$ $\{W = [w_{ij}]\}$
$k := 0$
while $k < n$
    $k := k + 1$
    for $i := 1$ **to** n
        for $j := 1$ **to** n
            if $w_{ik} = 1 \wedge w_{kj} = 1$ **then** $w_{ij} := 1$

$\{W = M_{R^*}\}$

Invariant for while-løkken: $w_{ij} = 1$ hvis der findes en vej af længde mindst 1 fra a_i til a_j hvor alle indre punkter $\in \{a_1, \ldots, a_k\}$. Ellers er $w_{ij} = 0$.

En relation $\sim$ på en mængde A siges at være en ækvivalensrelation hvis

- $\sim$ er refleksiv,
- $\sim$ er symmetrisk og
- $\sim$ er transitiv.

Hvis A er mængde og hvis K er en mængde af ikke-tomme delmængder af A (altså: $K \subseteq P(A)$, $\emptyset \notin K$) som opfylder at hvert element i A tilhører præcis én af mængderne i K så siger vi at K er en klassedeling af A og mængderne i K kaldes klasser.

Hvis A er en mængde med klassedeling K så er relationen $\sim$ på A defineret

$$a \sim b \Leftrightarrow \ a \text{ og } b \text{ tilhører samme klasse i } K$$

en ækvivalensrelation.

Omvendt, hvis $\sim$ er en ækvivalensrelation på A så udgør de forskellige ækvivalensklasser en klassedeling af A.