Udregning af dobbeltintegral

Hvis $R = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ \ g(x) \le y \le h(x)\}$ så er

$$\int\!\!\int_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

R er vertikalt simpel.

Hvis $R = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ \ g(y) \le x \le h(y)\}$ så er

$$\int\!\!\int_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

R er horisontalt simpel.

Hvis R er et område i planen så har det rumlige område

$$\{(x,y,z) \mid (x,y) \in R,\ \ g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$$

volumen (rumfang)

$$\int\int_R f(x,y) - g(x,y)\, dA,$$

forudsat at $f(x,y) \geq g(x,y)$ for alle $(x,y) \in R$.

Området over R under planen $z = 1$ har rumfang:

$$\int\int_R 1\, dA = 1 \times \text{arealet af } R.$$

Arealet af R defineres derfor til at være

$$\int\int_R 1\, dA.$$

Riemann sum

Lad $[a, b]$ og $[c, d]$ være inddelt i mindre intervaller hvor $R \subseteq [a, b] \times [c, d]$. Derved inddeles $[a, b] \times [c, d]$ i mindre rektangler. Lad $R_1, R_2, \ldots, R_k$ være de mindre rektangler der er indeholdt i R.

Riemann summen af $f(x, y)$ er så

$$\sum_{i=1}^{k} f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i,$$

hvor $(x_i^*, y_i^*) \in R_i$ og ΔA_i er arealet af R_i.

Eksempel

$R = \{(x,y) \mid \frac{1}{2} \leq x, \frac{1}{2} \leq y, xy \leq 1\}$ har areal

$$\iint_R 1\, dA = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{x}} 1\, dy\, dx = 2\ln(2) - \frac{3}{4} \approx 0,6363.$$

Riemann-sum: Inddel $[\frac{1}{2}, 2]$ i n lige store delintervaler (Både for x-interval og y-interval).

$n = 3$: Riemann-sum $= 0,25$

$n = 40$: Riemann-sum $\approx 0,5836$

$n = 400$: Riemann-sum $\approx 0,6307$

$n = 2000$: Riemann-sum $\approx 0,6352$