Grænseværdi og kontinuitet

Vi siger at $f(x,y)$ har grænseværdi L når $(x,y) \to (a,b)$ hvis der for ethvert $\epsilon > 0$ findes et $\delta > 0$ så

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \epsilon.$$

Vi skriver da

$$L = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y).$$

Hvis $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$ så siger vi at f er kontinuert i punktet (a,b).

En funktion som er sum eller produkt af kontinuerte funktioner er kontinuert.

Sammensætning af kontinuerte funktioner er kontinuert.

Differentiale og lineær approximation

Lineær approximation for funktion $f(x, y)$ af to variable:

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y)+f_x(x, y)\cdot\Delta x+f_y(x, y)\cdot\Delta y.$

Lad $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Differentialet df af $f(x, y)$ defines som

$$df = f_x(x, y)\cdot dx + f_y(x, y)\cdot dy.$$

eller

$$df = f_x(x, y)\cdot\Delta x + f_y(x, y)\cdot\Delta y.$$

Lineær approximation kan så skrives $\Delta f \approx df$.

Gradientvektoren af $f(x, y)$ defines som

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle.$$

Differentialet

$$df = \nabla f \cdot \langle dx, dy \rangle.$$

Vi siger at en funktion f af to variable er differentiabel i (a, b) hvis der findes en vektor $\langle c_1, c_2 \rangle$ så

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{f(a + h_1, b + h_2) - f(a, b) - \langle c_1, c_2 \rangle \cdot \langle h_1, h_2 \rangle}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0.$$

$f(x,y)$ siges at være kontinuert differentiabel hvis $f_x(x,y)$ og $f_y(x,y)$ eksisterer og er kontinuerte.

Sætning. Lad $f(x,y)$ være kontinuert differentiabel på cirkelskiven $\{(x,y) \mid \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r\}$. Hvis $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} < r$ så er

$f(a+\Delta x, b+\Delta y) =$
$f(a,b)+\nabla f(a,b)\cdot\langle \Delta x, \Delta y\rangle+\epsilon_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\epsilon_2(\Delta x,\Delta y)\Delta y,$
hvor

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \epsilon_i(\Delta x,\Delta y) = 0.$$

Hvis f er kontinuert differentiabel så er f differentiabel.